Egzamin z teorii mnogości
2 lutego 2023 r.
Część teoretyczna

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeśli X jest zbiorem przechodnim, to zbiorem przechodnim jest również zbiór $X \cup \{X\}$.

Zadanie 2. Podaj liczbę elementów zbioru $\left\{\aleph_0^{\aleph_2}, \aleph_1^{\aleph_2}, \aleph_2^{\aleph_2}, \aleph_3^{\aleph_2}\right\}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $2^{\aleph_{\omega+n}} = \aleph_{\omega+\omega+2023}$. Czy wówczas $2^{\aleph_{\omega+\omega}} = \aleph_{\omega+\omega+2023}$? Udziel odpowiedzi TAK/NIE.

Zadanie 4. Czy w zbiorze częściowo uporządkowanym $\left\langle [\aleph_2]^{\leqslant\aleph_0}, \subseteq \right\rangle$ istnieje łańcuch, którego suma jest mocy $\aleph_2$? Udziel odpowiedzi TAK/NIE.

Zadanie 5.
(a) Sformułuj definicję ultrafiltru niegłównego na zbiorze $\mathbb{N}$.
(b) Znajdź sumę rodziny wszystkich ultrafiltrów niegłównych na $\mathbb{N}$.

Zadanie 6.
(a) Sformułuj definicję zbioru stacjonarnego w $\aleph_3$.
(b) Czy zbiór $\{\alpha + \omega \cdot 2023 : \alpha \in \aleph_3\}$ jest stacjonarny w $\aleph_3$? Udziel odpowiedzi TAK/NIE.

Zadanie 7. Czy jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ jest rodziną niezależną podzbiorów liczby kardynalnej κ, to dla każdego zbioru $X \in \mathcal{A}$ rodzina $\{X \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ też jest niezależną rodziną podzbiorów κ? Udziel odpowiedzi TAK/NIE.

Zadanie 8. Udowodnij, przytaczając sformułowanie odpowiedniego twierdzenia, że przy założeniu GCH dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ mamy $\aleph_\omega \to (\aleph_n)^2_2$.

Zadanie 9. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną rodziną zbiorów skończonych. Udowodnij, przytaczając sformułowanie odpowiedniego twierdzenia, że rodzina $\mathcal{A}$ zawiera nieprzeliczalny Δ–system wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\bigcup \mathcal{A}$ jest nieprzeliczalny.

Zadanie 10. Podaj przykład $\aleph_{\omega_2}$–drzewa (tzn. drzewa wysokości $\aleph_{\omega_2}$, którego wszystkie poziomy mają moc mniejszą od $\aleph_{\omega_2}$) bez gałęzi współkońcowej.

Egzamin z teorii mnogości

2 lutego 2023 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Załóżmy, że dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej λ zachodzi równość $\lambda^{cf(\lambda)} = \lambda^+$. Udowodnij, że wówczas

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnego nieprzeliczalnego zbioru domkniętego $D \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $f[D] = \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że w każdym $(\aleph_\omega, \aleph_0)$-drzewie istnieje gałąź współkońcowa.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli rodzina indeksowana $\langle A_\alpha : \ \alpha < \omega_1 \rangle$, gdzie $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow A_\alpha \neq A_{\alpha'}$, składa się ze zbiorów skończonych, to istnieje stacjonarny zbiór $S \subseteq \omega_1$ taki, że rodzina $\{A_\alpha : \ \alpha \in S\}$ jest Δ-systemem.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, **CZYTELNIE** podpisanej kartce.