Egzamin z teorii mnogości

22 lutego 2022 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę porządkową α, taką że $\omega \cdot \alpha = \omega + \alpha$.

Zadanie 2. Niech κ będzie nieskończoną regularną liczbą kardynalną. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną mocy κ złożoną ze zbiorów mocy mniejszej niż κ i taką, że

$$\forall x \in \bigcup \mathcal{A} \ |\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| < \kappa.$$

Udowodnij, że rodzina $\mathcal{A}$ zawiera podrodzinę mocy κ, złożoną ze zbiorów parami rozłącznych.

Zadanie 3. Udowodnij, że istnieje ciąg $\langle a_n \rangle$ dodatnich liczb rzeczywistych zbieżny do zera oraz ultrafiltr $\mathcal{U}$ na ω takie, że dla każdego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi $\sum_{n \in A} a_n = +\infty$.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli zbiór częściowo uporządkowany $T = (\omega_1, \leqslant_T)$ jest ω_1-drzewem, to zbiór tych liczb granicznych $\alpha < \omega_1$, że $T|\alpha = \alpha$, jest zbiorem domkniętym i nieograniczonym w ω_1.

Przypomnienie: $T|\alpha = \Big\{\beta \in \omega_1 : \mathrm{tp}(\{\gamma \in \omega_1 : \gamma <_T \beta\}) < \alpha\Big\}$.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, **CZYTELNIE** podpisanej (najlepiej z numerem indeksu) kartce i przesłanie go w **oddzielnym** pliku w formacie pdf.