Egzamin z teorii mnogości

7 lutego 2022 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Niech $\alpha \neq 0$ będzie liczbą porządkowa. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
(i) dla każdego $n \in \omega, n \neq 0$, istnieje β_n taka, że $n\beta_n = \alpha$,
(ii) α jest liczbą graniczną.

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje zbiór $T \subseteq \mathbb{R}^2$ mocy continuum, którego żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej i jednocześnie taki, że każda para jego punktów realizuje inną odległość, tzn.:

$$\forall\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\} \in [T]^2 \ \Big(\{p_1, p_2\} \neq \{p_3, p_4\} \Rightarrow d(p_1, p_2) \neq d(p_3, p_4)\Big),$$

gdzie $d(p, q)$ oznacza odległość euklidesową w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $\leqslant_1$ i $\leqslant_2$ są dowolnymi dobrymi porządkami typu ω_1 zbioru ω_1. Niech $O_i(\beta) = \{\gamma \in \omega_1 : \gamma <_i \beta\}$ oznacza odcinek początkowy wyznaczony przez β w sensie dobrego porządku $\leqslant_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Udowodnij, że zbiór tych liczb granicznych $\alpha < \omega_1$, że

$$\Big\{\beta < \omega_1 : \mathrm{tp}(O_1(\beta)) < \alpha\Big\} = \Big\{\beta < \omega_1 : \mathrm{tp}(O_2(\beta)) < \alpha\Big\},$$

jest zbiorem domkniętym i nieograniczonym w ω_1.

Zadanie 4.
(i) Udowodnij, że jeśli U jest ultrafiltrem niegłównym na ω o następującej własności:

dla każdej funkcji $f : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$ istnieje zbiór jednorodny należący do U, $(*)$

to dla każdego ściśle rosnącego ciągu liczb naturalnych $(n_i)_{i\in\omega}$ istnieje zbiór $A \in U$ taki, że $|A \cap [n_i, n_{i+1})| = 1$ dla wszystkich $i \in \omega$.
(ii) Udowodnij, że CH implikuje istnienie ultrafiltru niegłównego U na ω o własności $(*)$ z punktu (i).

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, **CZYTELNIE** podpisanej kartce i przesłanie go w **oddzielnym** pliku w formacie pdf.