

Zadania domowe z Matematyki Dyskretnej #1
na 4 marca 2025 r.

Zadanie 1. Podaj dowód kombinatoryczny tożsamości

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

pokazując, że dla $n > 0$ lewa i prawa strona dowodzonej tożsamości wyrażają liczbę elementów zbioru $\{\langle a, A \rangle : a \in A \subseteq [n]\}$, obliczoną na dwa różne sposoby.

Zadanie 2. Podaj dowód kombinatoryczny tożsamości

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

wskazując, dla ustalonych liczb n, k (gdzie $n > 0$ i $0 \leq k \leq n$) bijekcję pomiędzy rodziną $\mathcal{A} = \{A \subseteq [n] : |A| = k\}$, a rodziną $\mathcal{B} = \{B \subseteq [n] : |B| = n - k\}$.

Zadanie 3. Podaj dowód kombinatoryczny tożsamości

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

pokazując, że lewa i prawa strona dowodzonej tożsamości wyrażają liczbę elementów zbioru $\{A \subseteq [2n] : |A| = n\}$, obliczoną na dwa różne sposoby (weź pod uwagę, że $[2n] = \{1, 3, \dots, 2n-1\} \cup \{2, 4, \dots, 2n\}$).

Zadanie 4. Niech f_k będzie k -tą liczbą Fibonacciego, tzn. $f_0 = 1$, a f_k dla $k > 0$ jest liczbą sposobów ułożenia chodnika o wymiarach 1 na k za pomocą (nieograniczonego zasobu) nierozróżnialnych kwadratowych płytek o wymiarach 1 na 1 i nierozróżnialnych prostokątnych płytek o wymiarach 1 na 2.

Podaj dowód kombinatoryczny tożsamości

$$f_{2n+1} = \sum_{k=0}^n f_{2k},$$

zliczając na dwa sposoby chodniki długości $2n + 1$.