

Egzamin z logiki matematycznej, część II
6 lutego 2023

Zadanie 1. Niech ψ będzie zdaniem

$$\psi := \forall x [\exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y (R(x, y) \wedge \neg \exists z (R(x, z) \wedge R(y, z)))],$$

gdzie R jest dwuargumentowym symbolem relacyjnym. Udowodnij, że:

- (a) zdanie ψ jest logicznie równoważne pewnemu zdaniu postaci $\forall \exists \forall$,
- (b) zdanie ψ nie jest logicznie równoważne żadnemu zdaniu postaci $\forall \exists$.

Zadanie 2. Niech E będzie dwuargumentowym symbolem relacyjnym. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą struktur postaci $\mathbb{A} = (A, E^{\mathbb{A}})$ takich, że dla każdego $a \in A$ zbiory $\{b \in A : (a, b) \in E^{\mathbb{A}}\}$ i $\{b \in A : (b, a) \in E^{\mathbb{A}}\}$ są skończone.

- (a) Czy klasa $\mathcal{K}$ jest zamknięta na ultraprodukty?
- (b) Czy klasa $\mathcal{K}$ jest zamknięta na elementarną równoważność?

Zadanie 3. Niech T będzie teorią w skończonej sygnaturze i niech $\gamma(x)$ oraz $\psi(x)$ będą dwiema formułami w sygnaturze T . Oznaczmy przez $\gamma^{\mathbb{A}}$, $\psi^{\mathbb{A}}$ zbiory definiowane w danej strukturze $\mathbb{A}$ przez formuły γ i ψ , odpowiednio. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje struktura skończona $\mathbb{A} \models T$ taka, że $|\gamma^{\mathbb{A}}| \geq n$ i $|\psi^{\mathbb{A}}| = |\gamma^{\mathbb{A}}| - 5$.

Udowodnij, że istnieje struktura $\mathbb{B} \models T$ taka, że każdy ze zbiorów B , $\gamma^{\mathbb{B}}$ i $\psi^{\mathbb{B}}$ jest mocy $\aleph_1$.

Zadanie 4. Niech T będzie teorią w skończonej sygnaturze z jednym symbolem relacyjnym dwuargumentowym $\preceq$, mającą następujące aksjomaty:

- $\preceq$ jest liniowym porządkiem,
- nie ma elementu maksymalnego ani minimalnego,
- istnieją dokładnie 4 elementy mające bezpośredni poprzednik lub bezpośredni następnik, tj. istnieją dokładnie 4 elementy x spełniające formułę

$$\exists y (y < x \wedge \neg \exists z (y < z < x)) \vee \exists y (x < y \wedge \neg \exists z (x < z < y)).$$

- (a) Udowodnij, że dla dowolnych modeli $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ zachodzi $\mathbb{A} \equiv_2 \mathbb{B}$.
- (b) Udowodnij, że teoria T nie jest zupełna.
- (c) Znajdź najmniejsze $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych modeli $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$, jeśli $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$, to $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.