

Egzamin z logiki matematycznej

6 lutego 2023 r.

Część teoretyczna

1. Załóżmy, że zbiór zmiennych zdaniowych V ma n elementów, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną. Ile jest teorii T nad zbiorem V , spełniających (jednocześnie) następujące własności:
 - T jest spełnialna,
 - T jest zupełna,
 - T jest zamknięta na $\models$, tzn., jeśli α jest zdaniem nad V i $T \models \alpha$, to $\alpha \in T$.

2. Rozstrzygnij, czy formuła

$$\exists y(\exists x P(x) \Rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y)),$$

gdzie P, Q są symbolami relacyjnymi jednoargumentowymi, jest tautologią logiki I rzędu. Podaj odpowiedź TAK/NIE.

3. Udowodnij, przytaczając sformułowanie odpowiedniego twierdzenia, że ultraprodukt postaci $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_n / \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$, a $|A_n| = n + 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, ma nieskończone uniwersum.
4. Rozstrzygnij, czy dla każdej struktury $\mathbb{A}$ rodzina wszystkich zbiorów $S \subseteq A$, definiowalnych bez parametrów w $\mathbb{A}$, jest równa rodzinie obrazów przy rzutowaniu $\pi : A^2 \rightarrow A$ na pierwszą oś (tzn. $\pi(x, y) = x$) zbiorów $P \subseteq A^2$, definiowalnych bez parametrów w $\mathbb{A}$. Odpowiedź krótko uzasadnij.
5. Sformułuj twierdzenie o zwartości logiki I rzędu.
6. Rozstrzygnij, czy istnieje para struktur $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ takich, że struktura $\mathbb{A}$ jest skończoną elementarną podstrukturą nieskończonej struktury $\mathbb{B}$. Odpowiedź krótko uzasadnij.
7. Sformułuj dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
8. Rozstrzygnij, czy dla każdej teorii T w skończonej sygnaturze prawdą jest, że jeżeli każdy skończony podzbiór teorii T ma model równoliczny z $\mathbb{N}$, to T ma model równoliczny z $\mathbb{N}$. Odpowiedź krótko uzasadnij.
9. Udowodnij, przytaczając sformułowanie odpowiedniego twierdzenia, że jeśli $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ są strukturami skończonej, czysto relacyjnej sygnatury i dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ gracz II ma strategię zwycięską w n -rundowej grze Ehrenfeuchta-Fraissego $G_n(\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$, to dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ gracz II ma też strategię zwycięską w n -rundowej grze Ehrenfeuchta-Fraissego $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.
10. Załóżmy, że dany jest system dowodowy logiki I rzędu, dla którego prawdziwe jest twierdzenie o pełności. Sformułuj to twierdzenie i wyprowadź z niego twierdzenie o zwartości.