

Egzamin z logiki matematycznej
3 lutego 2022 r.
Część zadaniowa

Zadanie 1. Niech

$$\begin{aligned}\psi &:= \forall w [\forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow f(w, x) \neq f(w, y)) \Rightarrow \forall y \exists x f(w, x) = y], \\ \eta &:= \forall w [\forall y \exists x f(w, x) = y \Rightarrow \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow f(w, x) \neq f(w, y))].\end{aligned}$$

Rozstrzygnij, czy

- (a) zdanie ψ jest logicznie równoważne zdaniu postaci $\forall \exists$,
- (b) zdanie η jest logicznie równoważne zdaniu postaci $\forall \exists$.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{A} = (\mathbb{Q}, \leq^{\mathbb{A}}, S^{\mathbb{A}})$, gdzie $\leq^{\mathbb{A}}$ to zwykły porządek na $\mathbb{Q}$, a $S^{\mathbb{A}} = \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$ i niech $\mathbb{B}$ będzie ultrapotęgą $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Rozstrzygnij, czy:

- (a) istnieje element $b \in B \setminus S^{\mathbb{B}}$, taki że dla każdego $k \in S^{\mathbb{B}}$ zachodzi $\mathbb{B} \models k < b$,
- (b) istnieje element $b \in B \setminus S^{\mathbb{B}}$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathbb{B} \models [(n, n, n, \dots)] < b$.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{A} = (A, \leq^{\mathbb{A}})$ będzie przeliczalną strukturą, w której $\leq^{\mathbb{A}}$ jest liniowym porządkiem na A . Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- (a) Istnieje elementarne rozszerzenie $\mathbb{B} \succ \mathbb{A}$, takie że $|B| = \mathfrak{c}$ i dla każdych $a_1, a_2 \in A$ spełniających $\mathbb{A} \models a_1 < a_2$ zbiór definiowany w $\mathbb{B}$ formułą $(a_1 < x \wedge x < a_2)$ jest mocy $\mathfrak{c}$,
- (b) $\leq^{\mathbb{A}}$ jest gęstym porządkiem na A .

Zadanie 4.

- (a) Niech $\mathbb{A} = (A, \equiv^{\mathbb{A}})$ będzie nieskończoną przeliczalną strukturą, w której $\equiv^{\mathbb{A}}$ jest relacją równoważności na A . Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje struktura $\mathbb{B}$, taka że $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \not\equiv \mathbb{B}$.
- (b) Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończona przeliczalna struktura $\mathbb{A} = (A, \leq^{\mathbb{A}})$, w której $\leq^{\mathbb{A}}$ jest liniowym porządkiem na A i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje struktura $\mathbb{B}$, taka że $\mathbb{A} \equiv_n \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \not\equiv \mathbb{B}$.