

Egzamin z logiki matematycznej

3 lutego 2022 r.

Część teoretyczna

1. Ile elementów ma podzbiór $\{[p \Rightarrow q]_{\equiv}, [(p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg p)]_{\equiv}, [\neg q \Rightarrow \neg p]_{\equiv}\}$ algebry Lindenbauma-Tarskiego (nad teorią pustą)?
2. Rozstrzygnij, czy istnieje ultrafiltr niegłówny na $\mathbb{N}$, do którego należy zbiór liczb parzystych i zbiór liczb podzielnych przez 3. Odpowiedź krótko uzasadnij.
3. Rozstrzygnij, czy istnieje ultraprodukt postaci $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_n / \mathcal{U}$, którego uniwersum jest skończone, $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$, a $|A_n| = |\mathbb{N}|$ dla każdego n parzystego. Odpowiedź krótko uzasadnij.
4. Załóżmy, że struktura $\mathbb{A}$ jest przeliczalna i jednorodna w tym sensie, że dla każdej pary elementów $a, b \in A$ istnieje automorfizm h struktury $\mathbb{A}$ taki, że $h(a) = b$. Znajdź moc rodziny wszystkich zbiorów $S \subseteq A$ definiowalnych bez parametrów w $\mathbb{A}$.
5. Rozstrzygnij, czy dla każdej teorii T prawdą jest, że jeżeli każdy skończony podzbiór teorii T ma model nieskończony, to T ma model nieskończony. Odpowiedź krótko uzasadnij.
6. Rozstrzygnij, czy istnieje sygnatura, taka że klasa wszystkich struktur przeliczalnych tej sygnatury jest aksjomatyzowalna. Odpowiedź krótko uzasadnij.
7. Podaj przykład pary struktur $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ takich, że struktura $\mathbb{A}$ jest podstrukturą struktury $\mathbb{B}$, ale nie jest jej elementarną podstrukturą.
8. Rozstrzygnij, czy formuła

$$\exists y \forall x (P(x) \Rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y)),$$

gdzie P, Q są symbolami relacyjnymi jednoargumentowymi, jest tautologią logiki I rzędu. Odpowiedź krótko uzasadnij.

9. Udowodnij, że jeśli $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ są strukturami skończonej, czysto relacyjnej sygnatury i dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ gracz II ma strategię zwycięską w grze $G_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, to gracz II ma też dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ strategię zwycięską w grze $G_n(\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$.
10. Rozstrzygnij, czy diagram elementarny danej struktury $\mathbb{A}$ sygnatury σ ma własność zaświadczenia przez termy (tzn., czy jeśli $\varphi(x)$ jest formułą sygnatury $\sigma_{\mathbb{A}} = \sigma \cup \{c_a : a \in A\}$, taką że $\text{ElDiag}(\mathbb{A}) \vdash \exists x \varphi(x)$, to istnieje term zamknięty t sygnatury $\sigma_{\mathbb{A}}$ taki, że $\text{ElDiag}(\mathbb{A}) \vdash \varphi(t/x)$). Odpowiedź krótko uzasadnij.

Uwaga: prosząc o krótkie uzasadnienie mamy na myśli uzasadnienia jedno- lub dwuzdaniowe.