

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Grzegorz Wolny**

Nr albumu: 201113

# **Modelowanie przepływów pracy z czasem ciągłym**

Praca magisterska  
na kierunku INFORMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra Piotra Chrzastowskiego**  
Instytut Informatyki

Październik 2006

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

Przedmiotem niniejszej pracy jest rozszerzenie modelu sieci przepływów pracy otrzymywanych za pomocą metody rozdrobnień o czas oraz zaproponowanie metody analitycznej służącej do badania rozkładów prawdopodobieństwa czasu działania takich sieci.

## **Słowa kluczowe**

stochastyczne sieci Petriego, sieci przepływu pracy, metoda rozdrobnień, modelowanie

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.3 Informatyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

I. Computing Methodologies  
I.6 SIMULATION AND MODELING  
I.6.4 Model Validation and Analysis

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Modeling of workflows with continuous time



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>1. Wstęp teoretyczny</b> . . . . .	7
1.1. Sieci Petriego . . . . .	7
1.2. Sieci przepływu pracy . . . . .	8
1.3. Sieci otrzymane metodą rozdrobnień . . . . .	10
1.3.1. Reguły rozdrobnień . . . . .	10
1.3.2. Drzewo rozdrobnień . . . . .	12
1.4. Procesy Markowa . . . . .	13
1.4.1. Procesy Markowa z czasem dyskretnym . . . . .	13
1.4.2. Procesy Markowa z czasem ciągłym . . . . .	14
1.5. Stochastyczne sieci Petriego . . . . .	16
1.5.1. Stochastyczne sieci Petriego z czasem ciągłym . . . . .	16
1.5.2. Uogólnione stochastyczne sieci Petriego . . . . .	19
<b>2. Podstawy matematyczne</b> . . . . .	21
2.1. Definicje . . . . .	21
2.2. Rozkład wykładniczy . . . . .	21
2.3. Gęstość . . . . .	22
2.4. Dystrybuanta . . . . .	23
2.5. Suma . . . . .	24
2.6. Maksimum . . . . .	26
<b>3. Analiza sieci przepływów pracy z czasem</b> . . . . .	29
3.1. Rozszerzenie sieci otrzymanych metodą rozdrobnień o czas . . . . .	29
3.2. Przegląd metod . . . . .	29
3.2.1. Równania . . . . .	29
3.2.2. Unifikacja . . . . .	30
3.2.3. Techniki agregacyjne . . . . .	31
3.2.4. Metody wykorzystujące budowę sieci . . . . .	31
3.2.5. Symulacja . . . . .	31
3.2.6. Podsumowanie . . . . .	32
3.3. Założenia . . . . .	32
3.4. Rozbicie sekwencyjne miejsca . . . . .	32
3.5. Rozbicie sekwencyjne tranzycji . . . . .	33
3.6. Rozbicie równoległe miejsca . . . . .	34
3.7. Rozbicie wyboru tranzycji . . . . .	35
3.8. Pętla . . . . .	41

3.9. Podsumowanie . . . . .	49
3.10. Co jest jeszcze do zrobienia? . . . . .	50
<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>52</b>

# Wprowadzenie

Sieci przepływu pracy w dzisiejszym świecie zaczynają pełnić coraz ważniejszą rolę. Wyszukiwarka *Google* po wpisaniu hasła *workflow* znajduje ponad 48000000 wyników. Jedną z przyczyn rosnącej popularności sieci przepływów pracy jest potrzeba znalezienia prostego sposobu na usystematyzowanie szeroko pojętych procesów — mogą to być zarówno procesy biznesowe, może to być obieg dokumentów w firmie, mogą to być procesy produkcji w przemyśle, mogą to być procesy nadzorujące działanie systemów komputerowych i wiele innych. Powstało bardzo dużo prac i narzędzi dotyczących modelowania takich przepływów. Poza samą metodologią projektowania przepływów pracy bardzo ważną rolę pełni również badanie ich własności — takich jak to czy rozpoczęty proces zawsze się zakończy i czy po zakończeniu wszystkie prace wchodzące w skład procesu również zostaną zakończone. Interesujące jest również to, czy istnieją takie składowe procesy, które nigdy nie mogą być wykonane, albo których wykonanie prowadzi do sytuacji niepożądanych. Wreszcie interesujące może być badanie wydajności procesu — czasu wykonania całego procesu, czasów działania poszczególnych jego składowych, czy też ich obciążenia. Okazuje się jednak, że badanie niektórych własności sieci jest bardzo trudne, a dla dużych problemów wręcz niewykonalne.

Jednym z możliwych modeli sieci przepływów pracy są sieci Petriego otrzymywane za pomocą metody rozdrobnień. Rozwiązanie to zostało zaproponowane w pracy [6]. Jego niewątpliwą zaletą jest to, że tak otrzymane sieci przepływu pracy mają zagwarantowane pewne dobre własności. Oryginalny model nie uwzględnia jednak w żaden sposób informacji o czasie. Celem tej pracy jest zaproponowanie odpowiedniego rozszerzenia, a także metody badania czasu działania tak rozszerzonych sieci.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy z nich stanowi wstęp teoretyczny do istniejących modeli i formalizmów. W rozdziale tym omówione są takie zagadnienia jak sieci Petriego, sieci przepływu pracy oraz metoda rozdrobnień. Poruszony jest też temat procesów Markowa stanowiących matematyczną podstawę opisywanych dalej stochastycznych sieci Petriego. Rozdział drugi poświęcony jest zdefiniowaniu kilku pojęć matematycznych wykorzystywanych w dalszej części pracy. W rozdziale tym wprowadzona jest również pewna klasa funkcji gęstości wraz z operacjami na niej. Trzeci rozdział zawiera opis rozszerzenia sieci otrzymanych metodą rozdrobnień o czas, przegląd znanych metod badania czasu działania stochastycznych sieci Petriego, a także wyprowadzenie nowej metody analizy sieci na podstawie jej drzewa rozdrobnień. Pracę kończy krótkie podsumowanie.





# Rozdział 1

## Wstęp teoretyczny

### 1.1. Sieci Petriego

Sieci Petriego zostały wymyślone w 1962 roku przez Carla Adama Petriego. Są one formalizmem służącym do modelowania oraz analizy współbieżnie działających procesów. Ich wielką zaletą, poza ścisłym matematycznym modelem, jest graficzna reprezentacja, czytelna nawet dla osób niemających na co dzień styczności z matematyką. W podrozdziale tym przedstawiony zostanie najprostszy wariant sieci Petriego — PT sieci (ang. *Place-Transition nets*), zwany też czasem po prostu sieciami Petriego.

Graficzna reprezentacja sieci składa się z następujących elementów:

- miejsc — reprezentowanych przez kółka, za pomocą których modelowane są warunki lub obiekty,
- żetonów — reprezentowanych przez czarne kółka, umieszczanych na miejscach, za pomocą których modelowane są stany warunków lub obiektów,
- tranzycji — reprezentowanych przez kwadraty, za pomocą których modelowane są akcje zmieniające stany warunków lub obiektów,
- strzałek — łączących miejsca z tranzycjami i tranzycje z miejscami, za pomocą których modelowane są zależności między warunkami lub obiektami a akcjami.

Jedna z możliwych formalnych definicji sieci Petriego jest następująca:

**Definicja 1.1.1** Sieć Petriego jest trójką  $\langle P, T, F \rangle$ , gdzie:

- $P$  jest skończonym zbiorem miejsc,
- $T$  jest skończonym zbiorem tranzycji,
- $P \cap T = \emptyset$ ,
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  jest zbiorem strzałek, zwanym też czasem relacją przepływu (ang. *flow relation*).

**Definicja 1.1.2** Zbiorem wejściowym tranzycji  $t$  nazywamy zbiór  $\bullet t := \{p \in P \mid (p, t) \in F\}$ . Zbiorem wyjściowym tranzycji  $t$  nazywamy zbiór  $t \bullet := \{p \in P \mid (t, p) \in F\}$ .

Zbiory wejściowe i wyjściowe dla miejsc definiuje się analogicznie.

Markowaniem sieci będziemy nazywać funkcję  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ . Funkcja ta określa stan sieci, tzn. liczbę żetonów na poszczególnych jej miejscach. Dla danego markowania  $M$  tranzycją aktywną  $t$  będziemy nazywać tranzycję, dla której na wszystkich jej miejscach wejściowych znajduje się co najmniej jeden żeton, tzn.  $\forall p \in \bullet t : M(p) > 0$ . Tranzycje aktywne mogą odpalić. Odpalenie tranzycji polega na zabraniu po jednym żetonie ze wszystkich miejsc wejściowych tranzycji i umieszczeniu po jednym żetonie na każdym z miejsc wyjściowych. Powiemy, że markowanie  $M_2$  jest osiągalne w jednym kroku z markowania  $M_1$ , jeśli istnieje tranzycja aktywna dla markowania  $M_1$ , której odpalenie powoduje zmianę markowania sieci z  $M_1$  na  $M_2$ . Osiągalność jest definiowana jako domknięcie zwrotne i przechodnie relacji osiągalności w jednym kroku.

**Definicja 1.1.3** Powiemy, że tranzycja  $T$  jest żywa dla markowania  $M_0$ , jeśli dla każdego markowania  $M$ , osiągalnego z  $M_0$ , istnieje takie markowanie  $M'$  osiągalne z  $M$ , że tranzycja  $T$  jest w nim aktywna. Powiemy, że sieć jest żywa, jeśli wszystkie markowania są żywe.

**Definicja 1.1.4** Powiemy, że markowanie  $M_0$  w sieci jest ograniczone, jeśli dla każdego miejsca  $p \in P$  istnieje taka stała  $k \in \mathbb{N}$ , że dla każdego markowania  $M$ , osiągalnego z markowania  $M_0$ , zachodzi  $M(p) \leq k$ .

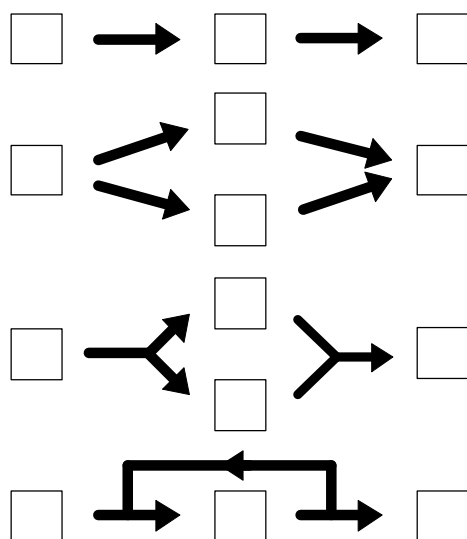
Zdefiniowany powyżej typ sieci Petriego pozwala na modelowanie stanów, zdarzeń, warunków, synchronizacji, równoległości, wyborów i pętli. Częstym problemem jest jednak rozmiar i stopień skomplikowania sieci modelujących rzeczywiste procesy lub systemy. Ponadto klasyczne sieci Petriego nie pozwalają na modelowanie czasu i tylko w ograniczonym stopniu pozwalają modelować dane. Dlatego też powstało dużo rozszerzeń oryginalnego modelu zaproponowanego przez Carla Adama Petriego. Wśród najważniejszych i najbardziej popularnych wymienić należy rozszerzenie o kolor umożliwiające modelowanie danych, rozszerzenie o czas oraz rozszerzenie o hierarchizację służące do łatwiejszego wyrażania dużych modeli. Rozszerzeniem sieci Petriego o czas zajmiemy się w dalszej części pracy.

Więcej informacji na temat sieci Petriego można znaleźć między innymi w książce [2].

## 1.2. Sieci przepływu pracy

Wstęp do tego rozdziału w dużym stopniu opiera się na pracy [1].

Pierwotnym zadaniem systemów informatycznych było wykonywanie pojedynczych, ściśle określonych zadań. Z czasem systemy te ewoluowały i obecnie coraz częściej ich zadaniem jest bezpośrednie wsparcie całych procesów biznesowych w zakresie ich kontroli, monitorowania i decyzji logistycznych. Systemy takie wspomagają lub wręcz sterują całym przepływem pracy w firmie. Głównym celem zastosowania przepływów pracy jest zapewnienie, że właściwe zadania są wykonywane przez właściwe osoby we właściwym czasie. Można powiedzieć, że przepływy pracy są podporządkowane przypadkom (ang. *case-based*), tzn. każde zadanie jest wykonywane dla konkretnego przypadku. Przykładowe przypadki to: przyznanie ubezpieczenia, złożenie deklaracji podatkowej, złożenie zamówienia. Przypadki są zwykle generowane przez zewnętrznego klienta. Zarządzanie oparte o przepływ pracy ma na celu jak najbardziej wydajne i skuteczne obsłużenie przypadków. Zdefiniowanie procesu przepływu pracy polegać więc będzie na określeniu, które zadania powinny być wykonane w jakiej kolejności oraz na wskazaniu zależności pomiędzy tymi zadaniami. Procesy takie definiowane są zwykle za pomocą konstrukcji określonych przez organizację *Workflow Management Coalition (WfMC)*, która



Rysunek 1.1: Konstrukcje używane przy przepływach pracy

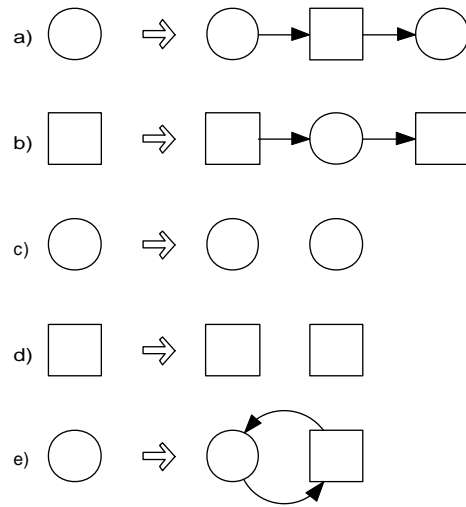
zajmuje się promowaniem przepływów pracy oraz standaryzowaniem systemów zarządzających przepływem pracy. Wyróżnione są cztery podstawowe typy takich konstrukcji (rysunek 1.1):

- sekwencja — zadania są wykonywane kolejno po sobie,
- równoległość — zadania są wykonywane równolegle; do realizacji równoległości wykorzystywane są dwa typy bloków — rozgałęzienie i złączenie typu *AND* (*AND-split* i *AND-join*),
- warunek — wykonane zostanie dokładnie jedno z zadań; wykorzystywane są dwa typy bloków — rozgałęzienie i złączenie typu *OR* (*OR-split* i *OR-join*),
- pętla — pozwala na wykonanie zadania wiele razy.

Okazuje się, że wspomniany wcześniej formalizm sieci Petriego bardzo dobrze nadaje się do modelowania przepływów pracy. Główne jego zalety wymienione w pracy [1] są następujące:

- formalna semantyka — przepływ pracy zyskuje dzięki temu jasną i precyzyjną definicję,
- reprezentacja graficzna — sprawia, że sieci te są intuicyjne i łatwe do zrozumienia,
- wyrażalność — sieci Petriego wspierają wszystkie podstawowe konstrukcje stosowane w przepływach pracy,
- własności — istnieje wiele dobrze opisanych własności sieci Petriego, które dzięki modelowi matematycznemu można wygodnie badać,
- analiza — wypracowanych zostało bardzo dużo technik służących zarówno do badania różnych własności sieci, jak również do liczenia ich wydajności,
- niezależność — sieci Petriego są niezależne od jakichkolwiek narzędzi i oprogramowania.

Wyrażenie sieci przepływu pracy w terminach sieci Petriego jest dość narzucające się — tranzycje odpowiadają zadaniom, miejsca odpowiadają warunkom, a żetony — przypadkom.



Rysunek 1.2: Reguły rozdrobnień: a — rozbitcie sekwencyjne miejsca, b — rozbitcie sekwencyjne tranzycji, c — rozbitcie równoległe miejsca, d — rozbitcie wyboru tranzycji, e — pętla

**Definicja 1.2.1** Sieć Petriego  $\langle P, T, F \rangle$  jest siecią przepływu pracy, wówczas gdy spełnione są następujące warunki:

- istnieje dokładnie jedno miejsce wejściowe  $i \in P$  takie, że  $\bullet i = \emptyset$ ,
- istnieje dokładnie jedno miejsce wyjściowe  $o \in P$  takie, że  $o \bullet = \emptyset$ ,
- dla każdego elementu  $x \in P \cup T$  istnieje zawierająca go ścieżka idąca od  $i$  do  $o$ .

**Definicja 1.2.2** Powiemy, że sieć przepływu pracy jest poprawna wtedy i tylko wtedy, gdy:

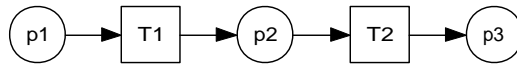
- dla każdego stanu  $M$  osiągalnego ze stanu początkowego i istnieje ciąg odpaleń tranzycji prowadzący ze stanu  $M$  do stanu końcowego  $o$
- stan  $o$  jest jedynym stanem osiągalnym z  $i$ , takim że na miejscu  $o$  znajduje się co najmniej jeden pionek
- dla każdej tranzycji, można dojść ze stanu początkowego do stanu, w którym ta tranzycja będzie aktywna

Poprawność sieci jest podstawową własnością sieci przepływu pracy. Gwarantuje ona że pojedynczy proces, który się rozpocznie, na pewno się skończy (przy założeniu, że sieć jest uczciwa, tzn. nie wystąpią żadne nieskończone pętle) i w momencie zakończenia działania w sieci nie będzie żadnych żetonów, a więc niewykonanych zadań. Co więcej właściwość ta gwarantuje, że wszystkie zadania są w sieci potrzebne i dla pewnych przypadków mogą zostać wykonane. Niestety, jak zostało to wykazane w pracy [5], sprawdzenie czy sieć jest poprawna w ogólnym przypadku jest *EXSPACE* trudne.

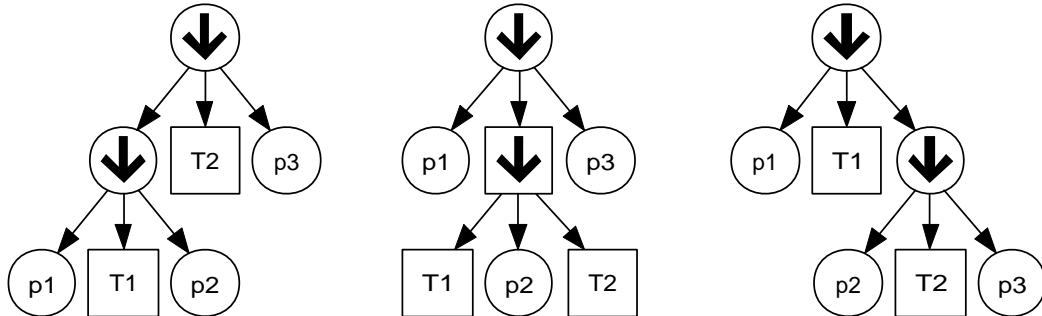
## 1.3. Sieci otrzymane metodą rozdrobnień

### 1.3.1. Reguły rozdrobnień

W podrozdziale tym opiszemy zstępującą metodę modelowania sieci przepływu pracy zaproponowaną w pracy [6]. Zgodnie z tą metodą tworzenie sieci zaczynać będziemy od po-



Rysunek 1.3: Przykładowa sieć przepływu pracy



Rysunek 1.4: Drzewa rozdrobnień odpowiadające sieci z rysunku 1.3

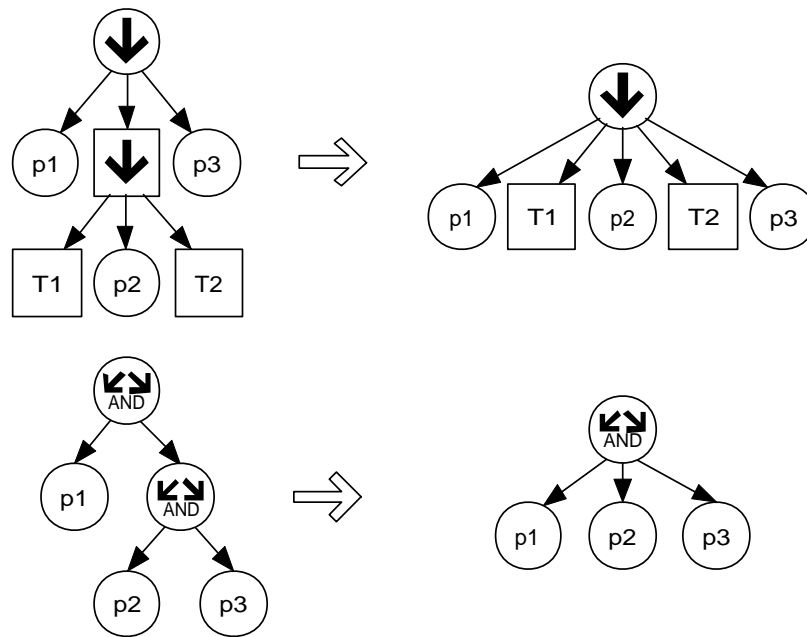
jedynczego miejsca. W kolejnych krokach stosowane będą reguły rozdrobnień przedstawione na rysunku 1.2. Dodatkowo wprowadzimy zasadę, że wszystkie reguły, z wyjątkiem rozbięcia sekwencyjnego miejsca, mogą być stosowane tylko wtedy, gdy przekształcany węzeł sieci ma co najmniej jedną strzałkę wejściową i co najmniej jedną strzałkę wyjściową. Wszystkie strzałki wejściowe przekształcanego węzła są kopiowane do wszystkich węzłów wejściowych fragmentu sieci, którym zastępujemy dany węzeł. Analogiczna zasada obowiązuje również dla strzałek wyjściowych. Zaproponowane reguły, pomimo swej prostoty, pozwalają wyrazić wiele spośród konstrukcji stosowanych przy modelowaniu przepływów pracy opisanych w poprzednim podrozdziale. Zastrzeżenie jest takie, że po rozbiciu równoległym (*AND-split*) musi nastąpić równoległa synchronizacja (*AND-join*), a po wyborze (*OR-split*) musi nastąpić złączenie (*OR-join*). Charakterystykę sieci możliwych do wyprowadzenia zawiera następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.3.1 ([6])** Sieć  $N = \langle P, T, \rightarrow \rangle$  otrzymana z pojedynczego miejsca w wyniku stosowania reguł rozdrobnień zgodnie z przedstawionymi powyżej zasadami ma następujące własności:

1. Istnieje dokładnie jedno miejsce  $p_{in} \in P$  takie, że  $\forall x \in P \cup T : p_{in} \rightarrow^* x$ . Miejsce to jest miejscem wejściowym sieci przepływu pracy.
2. Istnieje dokładnie jedno miejsce  $p_{out} \in P$  takie, że  $\forall x \in P \cup T : x \rightarrow^* p_{out}$ . Miejsce to jest miejscem wyjściowym sieci przepływu pracy.
3. Sieć  $N^{-1}$  otrzymana z sieci  $N$  przez odwrócenie strzałek jest konstruowalna za pomocą tego samego zbioru reguł rozdrobnień.

Ale dla nas dużo ważniejsze jest następujące twierdzenie gwarantujące poprawność sieci:

**Twierdzenie 1.3.2 ([6])** Sieć otrzymana z pojedynczego miejsca w wyniku stosowania reguł rozdrobnień zgodnie z przedstawionymi powyżej zasadami jest poprawna.



Rysunek 1.5: Przykładowe operacje kontrakcji

### 1.3.2. Drzewo rozdrobnień

Przedstawimy teraz konstrukcję drzewa rozdrobnień zaproponowaną w pracy [6]. Zauważmy, że stosując reguły rozdrobnień w naturalny sposób otrzymujemy strukturę drzewa odwzorowującego kolejność w jakiej reguły te były stosowane. Liście takiego drzewa odpowiadają tranzycjom i miejscom sieci, a węzły wewnętrzne regułom rozdrobnień. Konstrukcja drzewa rozpoczyna się od pojedynczego miejsca, będącego równocześnie miejscem, z którego wyprowadzana jest sieć przepływu pracy. Każda z reguł rozdrobnień jest postaci  $\langle \text{węzeł} \rangle ::= \langle \text{sieć} \rangle$ . Węzeł, dla którego stosujemy regułę jest liściem w drzewie rozdrobnień. Zastosowanie reguły powoduje zastąpienie go węzłem etykietowanym nazwą reguły, którego dziećmi są węzły sieci otrzymane w wyniku zastosowania reguły. Zauważmy, że dla rozbicia sekwencyjnego istotna jest kolejność węzłów. Przyjmijmy, że węzły będziemy kolejno umieszczać w drzewie zaczynając zawsze od lewej strony. Skonstruowane w ten sposób drzewo w jednoznaczny sposób wyznacza sieć przepływu pracy. Niestety konstrukcja ta nie gwarantuje nam jednoznaczności w drugą stronę. Spójrzmy bowiem na sieć z rysunku 1.3. Każde z drzew rozdrobnień przedstawionych na rysunku 1.4 generuje bowiem tę właśnie sieć. Ze względu na tę niejednoznaczność wprowadzimy operację kontrakcji. Polegać ona będzie na przesunięciu synów węzła o jeden poziom w górę i zmianie ich ojca na ojca danego węzła. Operacja kontrakcji jest wykonalna w sytuacji gdy ojciec i syn są etykietowani taką samą etykietą reguły rozdrobniającej: rozbić sekwencyjnym (bez rozróżnienia na miejsca i tranzycje), rozbić równoległym, wyborem, pętlą lub gdy ojciec jest etykietowany pętlą a syn wyborem. Operacja kontrakcji odpowiada zastąpieniu binarnych reguł rozdrobnienia regułami o dowolnej krotności. Przykładowe operacje kontrakcji przedstawione są na rysunku 1.5.

Twierdzenie z pracy [6] gwarantuje nam, że różne drzewa, odpowiadające tej samej sieci, po wykonaniu na nich wszystkich operacji kontrakcji są identyczne z dokładnością do kolejności synów w węzłach odpowiadających regułom innym niż rozbić sekwencyjne.

## 1.4. Procesy Markowa

W tym podrozdziale przedstawimy podstawowe definicje i fakty związane z łańcuchami Markowa. Podrozdział ten powstał w oparciu o książki [2] i [13], w których można znaleźć dużo dokładniejsze omówienie zagadnień jedynie zasygnalizowanych w tej pracy. Łańcuchy Markowa, czy też procesy Markowa, zostały wprowadzone w 1907 roku przez rosyjskiego matematyka, A.A. Markowa, jako klasa procesów stochastycznych spełniających następującą własność, zwaną własnością Markowa:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X(t) = x \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0] = \\ = \mathbb{P}[X(t) = x \mid X(t_n) = x_n], \quad t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Tak więc proces Markowa jest procesem stochastycznym  $\{X(t), t \in T\}$ , dla którego zachodzi powyższa własność. Intuicyjnie własność Markowa mówi, że przyszłość procesu Markowa (od chwili  $t_n$ ) jest zależna jedynie od aktualnego stanu.

**Definicja 1.4.1** *Proces stacjonarny  $X(t)$  to proces spełniający następującą zależność:*

$$\mathbb{P}[X(t+s) = x \mid X(t_n+s) = x_n] = \mathbb{P}[X(t) = x \mid X(t_n) = x_n]$$

Równanie to mówi, że proces stacjonarny jest niewrażliwy na przesunięcia w czasie. W dalszym ciągu naszych rozważań będziemy zajmować się przede wszystkim procesami stacjonarnymi. Dla takich procesów definiujemy  $p_{ij}(t - t_n) := \mathbb{P}[X(t) = j \mid X(t_n) = i]$  — a więc prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w czasie  $t - t_n$ . Konsekwencją tego, że proces jest stacjonarny jest własność braku pamięci, którą można zapisać następująco:

$$\mathbb{P}[\chi \geq y + s \mid \chi \geq s] = \mathbb{P}[\chi \geq y],$$

gdzie  $\chi$  jest zmienną losową oznaczającą czas jaki proces pozostaje w danym stanie. Jedynym ciągłym rozkładem spełniającym tę własność jest rozkład wykładniczy. Reasumując stwierdzamy, że czas jaki proces spędza w danym stanie w procesie Markowa z czasem ciągłym musi mieć rozkład wykładniczy. Podstawowe fakty dotyczące tego rozkładu przedstawione są w dalszej części pracy. Warto też zauważyć, że rozkładem odpowiadającym rozkładowi wykładniczemu dla procesów z czasem dyskretnym jest rozkład geometryczny.

### 1.4.1. Procesy Markowa z czasem dyskretnym

Szczególnym przypadkiem procesów Markowa są procesy, w których czas jest dyskretny ( $T = \mathbb{N}$ ). Definicja dyskretnego łańcucha Markowa będzie więc wyglądała następująco:

**Definicja 1.4.2** *Ciąg zmiennych losowych  $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  jest dyskretnym łańcuchem Markowa, wówczas gdy zachodzi:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = \\ = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Podobnie możemy zdefiniować  $p_{ij}(n, s) = \mathbb{P}[X_s = j \mid X_n = i]$ , a więc prawdopodobieństwo tego, że w chwili  $s$  system znajdzie się w stanie  $j$  pod warunkiem, że w chwili  $n$  był w stanie  $i$ . Zauważmy, że prawdopodobieństwa te muszą spełniać zależności:

$$\begin{aligned} 0 < p_{ij}(n, s) \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad n, s = 0, 1, 2, \dots \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(n, s) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad n, s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Bardzo ważną własnością jest tak zwane równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$\forall n \leq r \leq s : p_{ij}(n, s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(n, r) p_{kj}(r, s)$$

Dla stacjonarnych dyskretnych łańcuchów Markowa możemy zdefiniować:

$$p_{ij}(m) = p_{ij}(n, n+m) = \mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid X_n = i]$$

Na podstawie równania Chapmana-Kołmogorowa możemy napisać równanie:

$$p_{ij}(m) = \sum_{k \in S} p_{ik}(m-1) p_{kj}(1)$$

Przepisując to równanie w formie macierzowej dostajemy następującą zależność:

$$P^{(m)} = P^m,$$

gdzie  $P = (p_{ij}(1))$  jest macierzą przejścia w jednym kroku, a  $P^{(m)} = (p_{ij}(m))$  macierzą przejścia w  $m$  krokach.

Wprowadzimy teraz inną ważną wielkość — prawdopodobieństwo  $\pi_j^{(m)}$  tego, że łańcuch w chwili  $m$  znajduje się w stanie  $j$ . Prawdopodobieństwo to jest równe:

$$\pi_j^{(m)} = \sum_i \mathbb{P}[X_0 = i] p_{ij}(m)$$

Zapisanie powyższego równania w formie macierzowej daje nam zależność:

$$\Pi^{(m)} = \Pi^{(0)} P^m,$$

gdzie  $\Pi^{(m)} = (\pi_0^{(m)}, \pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, \dots)$ .

### 1.4.2. Procesy Markowa z czasem ciągłym

Wróćmy teraz do własności Markowa zdefiniowanej we wzorze 1.1. Przyjmijmy, że  $T = [0, \infty)$ . W takim przypadku będziemy mówić o procesie Markowa z czasem ciągłym. Dla uproszczenia przestrzeni stanów będziemy utożsamiać z liczbami naturalnymi, więc zamiast  $x_i$  będziemy pisać  $i$  na oznaczenie stanu. Potrzebne jest także dodatkowe założenie, że:

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Mówi ono, że proces nie może zmienić stanu w zerowym czasie.

To co nas będzie najbardziej interesowało, to podobnie jak dla łańcuchów dyskretnych, znalezienie prawdopodobieństwa tego, że proces w zadanej chwili  $t$  znajduje się w danym stanie  $i$ . Rozwiązanie tego problemu jest inne niż w przypadku dyskretnym, jednak sposób rozumowania jest podobny. Niech:

$$p_{ij}(s, t) = \mathbb{P}[X(t) = j \mid X(s) = i] \quad (1.4)$$

Odpowiednik równania Chapmana-Kołmogorowa dla przypadku ciągłego wygląda następująco:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t) \quad (1.5)$$



Jeśli przyjmiemy, że  $H(s, t) = (p_{ij}(s, t))$ , to powyższe równanie możemy zapisać w postaci:

$$H(s, t) = H(s, u)H(u, t), \quad s \leq u \leq t$$

Na podstawie równania 1.3 wiemy, że  $H(t, t) = I$ .

Zdefiniujemy teraz ciągły odpowiednik macierzy przejścia w jednym kroku  $P$  dla łańcucha dyskretnego. Będzie to operator infinitesimalny  $Q(t)$  definiowany jako pochodna po czasie wielkości  $p_{ij}(s, t)$  dla  $t \rightarrow s$ . Formalnie:

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(t, t + \Delta t) - I}{\Delta t}$$

Elementy macierzy  $Q(t)$  są więc definiowane następująco:

$$\begin{aligned} q_{ii}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} \\ q_{ij}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Intuicyjna interpretacja powyższych wielkości jest następująca — prawdopodobieństwo, że proces będący w chwili  $t$  w stanie  $i$  przejdzie do stanu innego niż  $i$  jest równe:  $-q_{ii}(t)\Delta t + o(\Delta t)$  (intensywność wyjść (*rate*) ze stanu  $i$  jest równa  $q_{ii}$ ), a prawdopodobieństwo przejścia do stanu  $j$  w przedziale czasowym o długości  $\Delta t$  wynosi  $q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t)$  (intensywność przejść ze stanu  $i$  do  $j$  jest równa  $q_{ij}$ ).

Mając zdefiniowany operator infinitesimalny możemy zapisać prospektywne i retrospektywne równania Chapmana-Kołmogorowa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} &= -q_{jj}(s)p_{ij}(s, t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}(s)p_{ik}(s, t) \\ \frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} &= -q_{ii}(s)p_{ij}(s, t) - \sum_{k \neq i} q_{ik}(s)p_{kj}(s, t) \end{aligned}$$

Równania te pozwalają wyznaczyć macierz  $H(s, t)$ .

Wielkością, która podobnie jak w przypadku łańcuchów dyskretnych będzie nas najbardziej interesowała jest prawdopodobieństwo  $\pi_j(t)$  tego, że proces w chwili  $t$  będzie znajdował się w stanie  $j$ . Niech  $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \dots)$ . Wówczas:

$$\pi(t) = \pi(0)H(0, t) \tag{1.6}$$

Z równania tego daje się przy użyciu prospektywnych równań Chapmana-Kołmogorowa wyprowadzić następujący wzór:

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = q_{jj}(t)\pi_j(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}(t)\pi_k(t)$$

Z wzoru 1.6 daje się również wyprowadzić wzór:

$$\pi(t) = \pi(0)e^{\int_0^t Q(u)du} \tag{1.7}$$

Powyższy wzór pojawi się jeszcze w dalszej części tej pracy.

## 1.5. Stochastyczne sieci Petriego

Jak już wspominaliśmy sieci Petriego w swej klasycznej postaci nie uwzględniają w żaden sposób informacji o czasie. Sieci takie pozwalają zbadać poprawność funkcjonalną modelowanego systemu. Niemożliwe jest jednak badanie wydajności. W związku z tym we wczesnych latach siedemdziesiątych zaproponowano kilka możliwości wzbogacenia sieci Petriego o czas. Istnieją dwa główne podejścia do tego problemu. Pierwsze z nich zakłada powiązanie informacji o czasie z miejscami. Żeton trafiający na miejsce  $p$  przez pewien określony dla tego miejsca czas staje się niedostępny dla wszystkich tranzycji wyjściowych miejsca  $p$ . W drugim podejściu czas wiązany jest z tranzycjami sieci — aktywne tranzycje odpalają po upływie ustalonego czasu. W podejściu tym wyróżnia się dwie dalsze grupy. W grupie pierwszej — sieci z wcześniejszym wyborem (*preselection model*) — tranzycja po aktywowaniu rezerwuje wszystkie pionki potrzebne jej do odpalenia. Pionki te stają się niedostępne dla innych tranzycji. W drugiej grupie — sieci ze współzawodnictwem (*race model*) — tranzycja po aktywacji nie rezerwuje pionków. Po upływie określonego czasu tranzycja odpala (o ile jest to jeszcze możliwe) zabierając potrzebne do odpalenia pionki i umieszczając nowe we wszystkich miejscach wyjściowych.

Kolejne rozróżnienie sieci Petriego jest zależne od tego jak określony jest czas oczekiwania tranzycji na odpalenie. Na tej podstawie wyróżnia się sieci deterministyczne i sieci stochastyczne. Jeszcze inna klasyfikacja dzieli sieci w zależności od strategii odpaleń ([19]). Wyróżnia się tutaj strategię *age memory*, polegającą na tym, że w przypadku zablokowania aktywnej tranzycji przed jej odpaleniem, czas jaki pozostał do odpalenia jest zapamiętywany i przy następnym aktywowaniu zegar uruchamiany jest od tego właśnie momentu. Strategia *enabling memory* charakteryzuje się tym, że w przypadku zablokowania aktywnej tranzycji przed odpaleniem jej zegar jest zerowany. Strategia *reset memory* polega natomiast na tym, że odpalenie dowolnej z tranzycji powoduje wyzerowanie zegarów wszystkich tranzycji — nawet tych, które nie były w bezpośrednim konflikcie z tranzycją odpalaną. W przypadku rozważanych przez nas sieci podział ten jednak nie będzie miał zastosowania, gdyż czas oczekiwania na odpalenie zgodny z rozkładem wykładniczym, dzięki własności braku pamięci, realizuje wszystkie wymienione wyżej strategie.

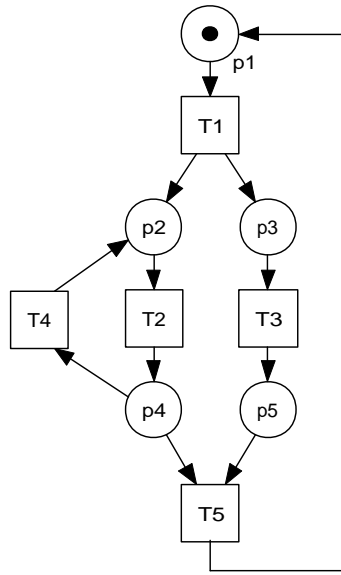
### 1.5.1. Stochastyczne sieci Petriego z czasem ciągłym

**Definicja 1.5.1** *Stochastyczną siecią Petriego z czasem ciągłym będziemy nazywać klasyczną sieć Petriego z przypisanym wektorem  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{|T|})$ , gdzie  $\lambda_i$  jest współczynnikiem (być może zależnym od markowania) rozkładu wykładniczego zmiennej oznaczającej czas oczekiwania na odpalenie tranzycji  $t_i$ .*

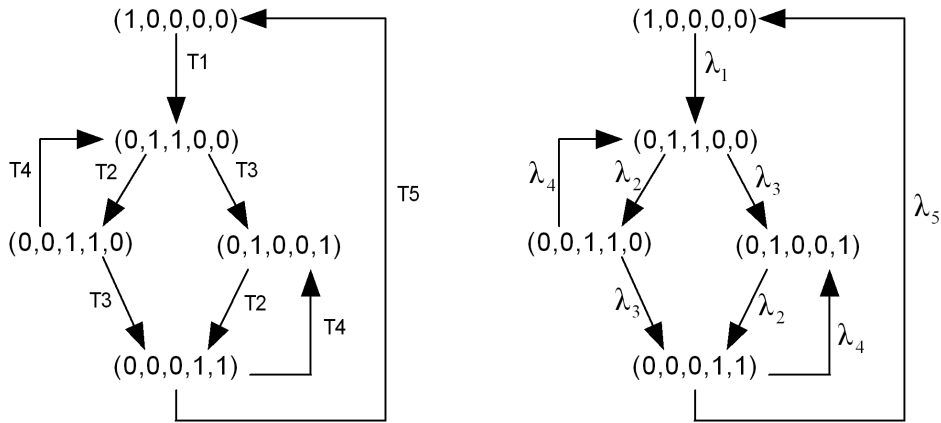
Zagadnienia związane ze stochastycznymi sieciami Petriego zostaną omówione na przykładowej sieci z rysunku 1.6. Przykład ten został zaczerpnięty z książki [2]. Przy omawianiu tego przykładu będziemy korzystać z faktów dotyczących rozkładu wykładniczego opisanych w rozdziale 2.2.

Tranzycja  $T_1$  ma przypisany współczynnik  $\lambda_1$ , a więc czas oczekiwania na odpalenie jest opisywany zmienną losową  $X_1$  z rozkładem  $Exp(\lambda_1)$ , co oznacza, że średni czas jaki tranzycja ta jest aktywna zanim odpali jest równy  $\frac{1}{\lambda_1}$ . Po odpaleniu tranzycji  $T_1$  system przechodzi do stanu  $M_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$ , w którym aktywne są dwie tranzycje —  $T_2$  i  $T_3$ . Prawdopodobieństwo tego, że tranzycja  $T_2$  odpali przed tranzycją  $T_3$  jest równe:

$$\mathbb{P}[T_2 \text{ odpali w stanie } M_1] = \mathbb{P}[X_2 < X_3] = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}$$



Rysunek 1.6: Przykładowa stochastyczna sieć Petriego



Rysunek 1.7: Graf osiągalności i proces Markowa dla sieci z rysunku 1.6

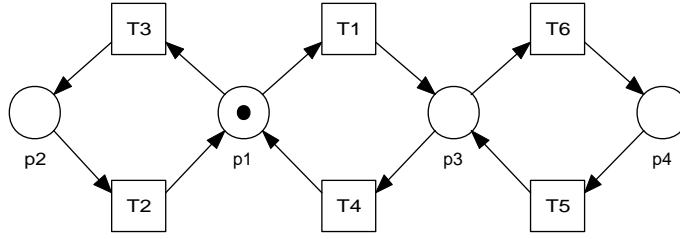
Podobnie prawdopodobieństwo tego, że odpali tranzycja  $T_3$  jest równe  $\frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}$ . Zauważmy, że prawdopodobieństwo przejścia do innego stanu jest niezależne od czasu jaki system spędzi w stanie  $M_1$ . Możemy też wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej oznaczającej czas jaki system pozostanie w stanie  $M_1$ . Czas ten będzie równy minimum z dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X_2$  i  $X_3$ , a więc:

$$\mathbb{P}[\min(X_2, X_3) \leq t] = 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)t}, \quad (1.8)$$

a stąd wynika że jest to rozkład wykładniczy ze współczynnikiem  $\lambda_2 + \lambda_3$ . W połączeniu z faktem, że prawdopodobieństwo zmiany stanu jest niezależne od czasu pobytu w tym stanie wnioskujemy, że stochastyczna sieć Petriego opisuje pewien proces Markowa.

Intensywność (współczynnik) przejścia ze stanu  $M_1$  do stanu po odpaleniu tranzycji  $T_2$  jest równa:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \frac{1}{\mathbb{E}(\min(X_2, X_3))} = \lambda_2$$



Rysunek 1.8: Przykładowa stochastyczna sieć Petriego

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem procesu Markowa odpowiadającego danej sieci stochastycznej [2]. W pierwszym kroku konstruowany jest graf osiągalności dla danej sieci Petriego. Graf osiągalności dla sieci z przykładu jest przedstawiony na rysunku 1.7. Przestrzeń stanów procesu Markowa jest równa zbiorowi stanów osiągalnych ze stanu początkowego sieci. Intensywność przejścia  $q_{ij}$  ze stanu  $M_i$  do  $M_j$  jest równa:

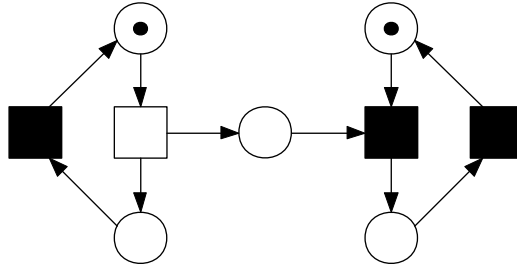
$$q_{ij} = \sum_{k \in T_{ij}} \lambda_k \quad i \neq j,$$

gdzie  $T_{ij}$  jest zbiorem tranzycji ze stanu  $M_i$  do stanu  $M_j$ . Intensywność wyjścia ze stanu  $M_i$  jest zaś tak dobrana, żeby  $\sum_j q_{ij} = 0$ , a więc:

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

W ten sposób otrzymujemy macierz  $Q = (q_{ij})$ , która jest operatorem infinitezmalnym opisującym proces Markowa odpowiadający stochastycznej sieci Petriego. Jak wiemy z podrozdziału 1.4.2 operator ten pozwala zbadać wiele interesujących własności procesu, a więc również samej sieci.

Możliwość przetłumaczenia stochastycznej sieci Petriego na odpowiadający jej proces Markowa pokazuje, że sieci Petriego rozszerzone o czas mają cały czas ścisły matematycznie model. Procesy Markowa są w matematyce bardzo popularne i powszechnie stosowane przy różnych zagadnieniach związanych z modelowaniem systemów ze świata rzeczywistego. Ponadto dają one gotowe, dobrze poznane metody badania wielu aspektów wydajnościowych modelowanego systemu. Jednak podejście takie nie jest pozbawione wad. Największą z nich wydaje się być rozmiar przestrzeni stanów tak otrzymywanego procesu, który często w praktycznych zastosowaniach uniemożliwia albo bardzo ogranicza badanie takiego procesu. Wynika to z faktu, że rozmiar przestrzeni stanów może rosnąć wykładniczo względem liczby węzłów sieci. Drugi problem opisany w książce [2] jest związany z analizą sieci, w których współczynniki rozkładów tranzycji różnią się znacząco rzędami wielkości. Sytuacja taka prowadzi do tego, że niektóre metody numeryczne dla zróżnicowanych danych dają niepoprawne wyniki. Jednym z przykładów jest sieć przedstawiona na rysunku 1.8. Przyjmijmy, że  $\Lambda = (1, 1, 1, \mu, \mu, \mu)$ . Sieć ta została zbadana dla różnych wartości parametru  $\mu$ . Rozkład stacjonarny (a więc rozkład prawdopodobieństwa przebywania w poszczególnych stanach przy czasie dążącym do nieskończoności) dla tej sieci policzony metodami analitycznymi jest równy  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ . Proponowana metoda numeryczna zwracała wyniki obarczone niewielkim błędem dla  $\mu < 10000$ , ale dla  $\mu \rightarrow \infty$  zwracany rozkład stabilizował się na  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$ . Jednym z możliwych rozwiązań drugiego problemu jest rozszerzenie stochastycznych sieci Petriego zaproponowane w kolejnym podrozdziale.



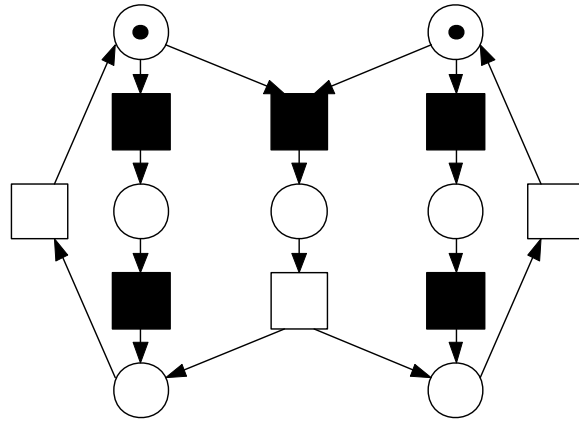
Rysunek 1.9: Sieć *GSPN* ograniczona, a *PN* nie ograniczona

### 1.5.2. Uogólnione stochastyczne sieci Petriego

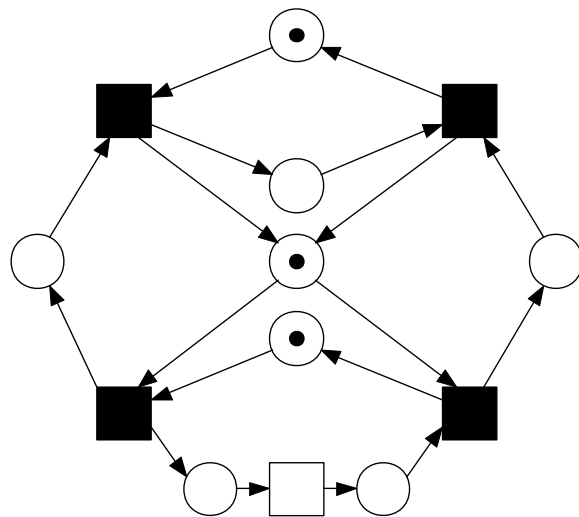
Uogólnione stochastyczne sieci Petriego to sieci posiadające dwa typy tranzycji — tranzycje czasowe, które podobnie jak w zwykłych stochastycznych sieciach odpalają po czasie z rozkładem wykładniczym o zadanym współczynniku oraz tranzycje natychmiastowe, które odpalają natychmiast po aktywowaniu. Tranzycje natychmiastowe oznaczane są zwykle na rysunkach sieci jako zamalowane prostokąty. Tranzycje natychmiastowe również mają przypisane współczynniki zwane też czasem wagami. Zdefiniujemy teraz reguły odpaleń tranzycji. W przypadku, gdy w zbiorze tranzycji aktywnych znajdują się jedynie tranzycje czasowe, to reguły są takie same jak poprzednio. W przypadku samych tranzycji natychmiastowych o prawdopodobieństwie odpalenia decydują wagi aktywnych tranzycji. Tranzycja natychmiastowa  $t$  odpala wówczas z prawdopodobieństwem równym  $\frac{w_t}{\sum_{s \in ET} w_s}$ , gdzie  $ET$  jest zbiorem aktywnych tranzycji, a  $w_t$  oznacza wagę tranzycji  $t$ . Z ostatnim przypadkiem mamy do czynienia wówczas, gdy w zbiorze tranzycji aktywnych znajdują się zarówno tranzycje czasowe jak i natychmiastowe. Wówczas przyjmuje się, że tranzycje czasowe nie są aktywne, a odpalić mogą jedynie tranzycje natychmiastowe. Odpalenie następuje zgodnie z regułą obowiązującą dla samych tranzycji natychmiastowych.

Analiza własności takich sieci przebiega trochę inaczej niż w przypadku stochastycznych sieci Petriego. Powodem jest to, że tranzycje natychmiastowe odpalają w czasie zerowym, wobec czego czas pobytu w stanach, w których aktywna jest choć jedna tranzycja natychmiastowa nie ma rozkładu wykładniczego. Stany takie nazywane są często stanami niknącymi (*vanishing*). Pozostałe stany to stany istotne (*tangible*). Konsekwencją braku rozkładu wykładniczego w stanach niknących jest to, że uogólniona stochastyczna sieć Petriego nie opisuje bezpośrednio procesu Markowa z czasem ciągłym. Zostały wypracowane różne metody badania takich sieci, podobnie jak poprzednio oparte przede wszystkim o procesy Markowa. Metody te jednak nie zostaną przedstawione w tej pracy. Ich opis można znaleźć między innymi w książkach [2] i [14].

Zajmiemy się teraz jeszcze przez chwilę badaniem jakościowych własności uogólnionych sieci stochastycznych. Okazuje się, że o ile zwykle sieci stochastyczne zachowują wszystkie własności sieci (bez uwzględnienia czasu), tak wprowadzenie tranzycji natychmiastowych może pozbawić sieci pewnych własności. Spójrzmy na przykłady pochodzące z książki [2] przedstawione na rysunkach 1.9, 1.10 i 1.11. Uogólnioną sieć stochastyczną będziemy oznaczać przez *GSPN*, a klasyczną sieć Petriego, otrzymaną z niej przez zastąpienie wszystkich tranzycji czasowych i natychmiastowych zwykłymi tranzycjami przez *PN*. Na podstawie przykładów tych widać, że nie możemy wnioskować o żywotności sieci w żadną ze stron. Nie możemy też na podstawie ograniczoności sieci *GSPN* wnioskować o ograniczoności sieci *PN*. Można jedynie wykazać, że jeśli sieć *PN* jest ograniczona to sieć *GSPN* też.



Rysunek 1.10: Sieć *PN* żywa, a *GSPN* nie żywa



Rysunek 1.11: Sieć *GSPN* żywa, a *PN* nie żywa

## Rozdział 2

# Podstawy matematyczne

### 2.1. Definicje

Zacznijmy od zdefiniowania najważniejszych pojęć i funkcji wykorzystywanych w dalszej części pracy.

**Definicja 2.1.1** Funkcję  $\Gamma$  definiujemy następująco:

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ \Gamma(n, x) &= (n-1)! e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \quad n \in \mathbb{N}^+\end{aligned}\tag{2.1}$$

Przez  $\mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$  będziemy oznaczać funkcję charakterystyczną przedziału  $[0, \infty)$ . Znak  $\sim$  będziemy używać przy określaniu rozkładów zmiennych losowych. Przykładowo  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  oznaczać będzie, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$ , a  $X \sim Y$  będzie oznaczać, że zmienna losowa  $X$  ma taki rozkład jak zmienna losowa  $Y$ .

### 2.2. Rozkład wykładniczy

Rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda \in (0, \infty)$  to rozkład  $\text{Exp}(\lambda)$  z gęstością ([12]):

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)\tag{2.2}$$

Dystrybuanta rozkładu wykładniczego jest dana wzorem  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$  ([12]). Wartość oczekiwana rozkładu zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie  $\text{Exp}(\lambda)$  wynosi  $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ , a jej odchylenie standardowe  $D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$  ([12]).

Ogólnie znanym faktem dotyczącym rozkładu wykładniczego jest również poniższy lemat.

**Lemat 2.2.1** Dla  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  o rozkładach odpowiednio  $\text{Exp}(\lambda_1), \dots, \text{Exp}(\lambda_n)$  zachodzą następujące własności:

$$\min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n),\tag{2.3}$$

$$\mathbb{P}(\forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : X_i < X_k) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\tag{2.4}$$

**Dowód:** Na początku udowodnimy własność 2.3. W tym celu obliczymy dystrybuantę zmiennej  $\min(X_1, \dots, X_n)$ .

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t \vee \dots \vee X_n \leq t) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t) \dots \mathbb{P}(X_n > t) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} \dots e^{-\lambda_n t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \end{aligned}$$

Jest to dystrybuanta zmiennej losowej o rozkładzie  $Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ , stąd pierwsza część tezy.

Teraz obliczymy  $P := \mathbb{P}(\forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : X_i < X_k)$ .

$$P = \int \dots \int_A f_{X_1 \dots X_n}(x) dx$$

gdzie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  i  $A = \{x_i < x_1, \dots, x_i < x_{i-1}, x_i < x_{i+1}, \dots, x_i < x_n\}$ , a  $f_{X_1 \dots X_n}(x)$  jest gęstością rozkładu łącznego zmiennych  $X_1, \dots, X_n$ . Z niezależności zmiennych losowych wynika, że gęstość rozkładu łącznego jest równa iloczynowi ich gęstości. Wobec tego:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty \int_{x_i}^\infty \dots \int_{x_i}^\infty f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n dx_i = \\ &= \int_0^\infty \int_{x_i}^\infty \dots \int_{x_i}^\infty \lambda_1 \dots \lambda_n e^{-\lambda_1 x_1} \dots e^{-\lambda_n x_n} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n dx_i = \\ &= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_1 x_i} \dots e^{-\lambda_n x_i} dx_i = \int_0^\infty \lambda_i e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x_i} dx_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \end{aligned}$$

□

## 2.3. Gęstość

W pracy [15] został udowodniony następujący lemat:

**Lemat 2.3.1** *Dla każdego stanu acyklicznego łańcucha Markowa z czasem ciągłym, prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}_i(t)$  tego, że w chwili  $t$  proces znajduje się w stanie  $i$ , może być zapisane jako wielomian wykładniczy postaci:*

$$\mathbb{P}_i(t) = \sum_j e^{-\gamma_{ij} t} \left( \sum_k a_{ijk} t^k \right)$$

Dowód tego lematu opiera się na założeniu o acykliczności łańcucha Markowa oraz postaci całkowej wzoru Chapmana-Kołmogorowa pozwalającego rekurencyjnie wyznaczyć wielkości  $\mathbb{P}_j(t)$ .

Zgodnie z tym wynikiem wprowadzimy klasę funkcji opisujących gęstości zmiennych losowych, o których mowa będzie w dalszej części pracy. Do klasy tej będziemy zaliczać funkcje następującej postaci:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\max \text{pot}_i} \sum_{j=1} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad (2.5)$$

gdzie:



- $max$  - oznacza maksymalną potęgę przy zmiennej  $x$
- $pot_i$  - oznacza ilość parami różnych wykładników przy  $e$  stojących przy  $x^i$
- $\alpha_{i,j}$  - oznacza  $j$ -ty wykładnik przy  $e$  stojących przy  $x^i$
- $a_{i,j}$  - oznacza współczynnik stojący przy  $x^i e^{-\alpha_{i,j}}$

**Przykład:**

Dla funkcji

$$\left( \frac{51}{2} e^{-x} - 24 e^{-2x} - \frac{3}{2} e^{-3x} - 15 x e^{-x} - 12 x e^{-2x} + 3 x^2 e^{-x} \right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

mamy  $max = 2$ ,  $pot_0 = 3$ ,  $pot_1 = 2$ ,  $pot_2 = 1$ ,  $\alpha_{0,1} = 1$ ,  $\alpha_{0,2} = 2$ ,  $\alpha_{0,3} = 3$ ,  $\alpha_{1,1} = 1$ ,  $\alpha_{1,2} = 2$ ,  $\alpha_{2,1} = 1$ ,  $a_{0,1} = \frac{51}{2}$ ,  $a_{0,2} = -24$ ,  $a_{0,3} = -\frac{3}{2}$ ,  $a_{1,1} = -15$ ,  $a_{1,2} = -12$ ,  $a_{2,1} = 3$ .

W dalszej części pracy okaże się, że tak zdefiniowana klasa funkcji jest zamknięta na wszystkie operacje, które będziemy na niej wykonywać.

Dodatkowo wprowadzimy jeszcze specjalną, sztuczną zmienną losową oznaczaną przez  $\varepsilon$ . Zmienna ta będzie miała rozkład punktowy —  $\mathbb{P}(\varepsilon = 0) = 1$ . Umożliwi nam to pewne uogólnienia w dalszej części pracy.

## 2.4. Dystrybuanta

Obliczymy teraz dystrybuantę dla zmiennej losowej  $X$  o gęstości postaci 2.5:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Dystrybuanta zmiennej losowej  $X$  wyraża się wzorem:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx = \int_{-\infty}^t \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx$$

Dla  $t \leq 0$  mamy  $F(t) = 0$ . Dalsze rachunki wykonujemy przy założeniu, że  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \int_0^t a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} (\Gamma(i+1) - \Gamma(i+1, \alpha_{i,j} t)) = \\ &= \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} \Gamma(i+1) - \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} \Gamma(i+1, \alpha_{i,j} t) = \\ &= \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! e^{-\alpha_{i,j} t} \sum_{k=0}^i \frac{(\alpha_{i,j} t)^k}{k!} = \\ &= \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\max pot_i} \sum_{j=1} \sum_{k=0}^i \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i-k+1}} \frac{i!}{k!} t^k e^{-\alpha_{i,j} t} \end{aligned}$$

Wartość całki  $\int_0^t a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} dx$  została wyznaczona przez program *Mathematica*. Funkcja  $\Gamma$  została zdefiniowana we wzorze 2.1.

Ostatecznie dystrybuantę zmiennej losowej  $X$  o gęstości  $g(x)$  opisuje wzór:

$$F(t) = \left( \sum_{i=0}^{\max \text{pot}_i} \sum_{j=1}^{\text{pot}_i} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\max \text{pot}_i} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^i \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i-k+1}} \frac{i!}{k!} t^k e^{-\alpha_{i,j} t} \right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \quad (2.6)$$

## 2.5. Suma

Rozważmy zmienną losową będącą sumą  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ . Zmienną tę będziemy oznaczać  $SUMA(X_1, \dots, X_n)$ , jej gęstość przez  $s_{X_1, \dots, X_n}$ , a dystrybuantę przez  $S_{X_1, \dots, X_n}$ .

**Lemat 2.5.1** *Dla sumy niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  zachodzą następujące wzory:*

$$SUMA(X_1, \dots, X_n) = SUMA(X_{\delta(1)}, \dots, X_{\delta(n)}) \quad \delta \in S_n \quad (2.7)$$

$$SUMA(X_1, \dots, X_n)(t) = SUMA(SUMA(X_1, \dots, X_{n-1}), X_n) \quad (2.8)$$

**Dowód:**

Wzory te wynikają bezpośrednio z przemienności i łączności dodawania. □

Z lematu wnioskujemy, że dla wyznaczenia rozkładu sumy  $n$  zmiennych losowych wystarczy umiejętność wyznaczania rozkładu sumy dla pary zmiennych.

W książce [12] udowodniony został następujący lemat:

**Lemat 2.5.2** *Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych o rozkładach ciągłych jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością będącą splotem gęstości.*

Prostym wnioskiem z tego lematu jest następujący lemat:

**Lemat 2.5.3** *Gęstość sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o gęstościach  $f_X$  i  $f_Y$ , t.ż.  $f_X(x) = 0$  i  $f_Y(x) = 0$  dla  $x < 0$  oraz ciągłych dla  $x \geq 0$  wyraża się wzorem:*

$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x) dx & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Wyznamy teraz gęstość rozkładu sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o gęstościach  $f(x)$  i  $g(x)$  odpowiednio, gdzie  $f(x)$  i  $g(x)$  są postaci 2.5 i są zdefiniowane następująco:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} b_{i,j} x^i e^{-\beta_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Będziemy dążyć do uzyskania wzoru na gęstość sumy postaci 2.5. Gęstości  $f$  i  $g$  spełniają założenia lematu 2.5.3, więc możemy z niego skorzystać. Dla  $t < 0$   $s_{X,Y}(t) = 0$ . Dla  $t \geq 0$  zaś mamy:

$$\begin{aligned}
s_{X,Y}(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x) dx = \\
&= \int_0^t \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \right) \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} b_{i,j} (t-x)^i e^{-\beta_{i,j} (t-x)} dx = \\
&= \int_0^t \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \right) \sum_{k=0}^{\text{mY}} \sum_{l=1}^{\text{pY}_k} b_{k,l} (t-x)^k e^{-\beta_{k,l} (t-x)} dx = \\
&= \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \sum_{k=0}^{\text{mY}} \sum_{l=1}^{\text{pY}_k} a_{i,j} b_{k,l} \int_0^t x^i (t-x)^k e^{-\alpha_{i,j} x} e^{-\beta_{k,l} (t-x)} dx = \\
&= \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \sum_{k=0}^{\text{mY}} \sum_{l=1}^{\text{pY}_k} a_{i,j} b_{k,l} e^{-\beta_{k,l} t} \int_0^t x^i (t-x)^k e^{-(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}) x} dx
\end{aligned}$$

Teraz musimy rozpatrzyć dwa przypadki. W pierwszym, gdy  $\alpha_{i,j} = \beta_{k,l}$ , do sumy wejdzie następujący składnik (całka została wyznaczona przez program *Mathematica*):

$$I_1 = a_{i,j} b_{k,l} e^{-\beta_{k,l} t} \int_0^t x^i (t-x)^k dx = a_{i,j} b_{k,l} \frac{i! k!}{(i+k+1)!} t^{i+k+1} e^{-\beta_{k,l} t} \quad (2.10)$$

Zauważmy, że składnik ten możemy również zapisać następująco:

$$I_1 = a_{i,j} b_{k,l} \frac{i! k!}{(i+k+1)!} t^{i+k+1} e^{-\alpha_{i,j} t}$$

Z drugim przypadkiem mamy do czynienia, gdy  $\alpha_{i,j} \neq \beta_{k,l}$ . Wówczas do sumy wejdzie:

$$\begin{aligned}
I_2 &= a_{i,j} b_{k,l} e^{-\beta_{k,l} t} \int_0^t x^i (t-x)^k e^{-(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}) x} dx = \\
&= a_{i,j} b_{k,l} e^{-\beta_{k,l} t} \int_0^t x^i \left( \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} t^d x^{k-d} \right) e^{-(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}) x} dx = \\
&= \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} a_{i,j} b_{k,l} t^d e^{-\beta_{k,l} t} \int_0^t x^{i+k-d} e^{-(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}) x} dx
\end{aligned}$$

Całka ta również została wyznaczona przez program *Mathematica*. Jest ona równa:

$$\int_0^t x^s e^{-\alpha x} dx = (s! - \Gamma(s+1, \alpha t)) \alpha^{-s+1},$$

gdzie funkcja  $\Gamma$  jest zdefiniowana wzorem 2.1. Wobec tego mamy:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} (i+k-d)! \frac{a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d+1}} t^d e^{-\beta_{k,l} t} + \\
&- \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} \frac{a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d+1}} t^d e^{-\beta_{k,l} t} \Gamma(i+k-d+1, t(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}))
\end{aligned}$$

Rozbijmy wyrażenie  $I_2$  na dwa, tak żeby  $I_2 = I_{2,1} - I_{2,2}$ :

$$I_{2,1} = \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} (i+k-d)! \frac{a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d+1}} t^d e^{-\beta_{k,l} t} \quad (2.11)$$

oraz:

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= \sum_{d=0}^k (-1)^{k-d} \binom{k}{d} \frac{a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d+1}} t^d e^{-\beta_{k,l} t} \cdot \\ &\quad \cdot \left( (i+k-d)! e^{-(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l}) t} \sum_{c=0}^{i+k-d} \frac{t^c (\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^c}{c!} \right) = \\ &= \sum_{d=0}^k \sum_{c=0}^{i+k-d} (-1)^{k-d} \binom{k}{d} \frac{(i+k-d)!}{c!} \frac{a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d-c+1}} t^{d+c} e^{-\alpha_{i,j} t} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Funkcja gęstości, będąca sumą składników postaci  $I_1$ ,  $I_{2,1}$  i  $I_{2,2}$ , ma już żadaną postać. Teraz zajmiemy się uproszczeniem funkcji gęstości. W tym celu poczyńmy dwie obserwacje. Po pierwsze z lematu 2.5.3 wynika, że  $s_{X,Y}(t) = s_{Y,X}(t)$ . Po drugie zauważmy, że wszystkie wykładniki przy  $e$  w wyrażeniach postaci  $I_{2,1}$  pochodzą z gęstości zmiennej  $Y$ , a wszystkie wykładniki przy  $e$  w wyrażeniu  $I_{2,2}$  pochodzą z gęstości zmiennej  $X$ . Wobec tego, jeśli przyrównamy do siebie gęstości  $s_{X,Y}(t)$  i  $s_{Y,X}(t)$ , to wyrażenia postaci  $I_1$  się zredukują (po ewentualnym uwzględnieniu wcześniejszej obserwacji). Pozostałe sumy wyrażen postaci  $I_{2,1}$  i  $I_{2,2}$  oraz  $I'_{2,1}$  i  $I'_{2,2}$  (analogicznych wyrażen ze wzoru na gęstość  $s_{Y,X}(t)$ ) muszą być sobie równe. Stąd oraz z drugiej obserwacji wynika, że sumę wyrażen postaci  $I_{2,2}$  można zastąpić sumą wyrażen  $I'_{2,1}$ , a więc wyrażen prostszych. Podsumowując otrzymujemy następujący wzór na gęstość  $s_{X,Y}$ :

$$\begin{aligned} s_{X,Y}(t) &= \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \sum_{k=0}^{mY} \sum_{l=1}^{pY_k} \frac{i! k! a_{i,j} b_{k,l}}{(i+k+1)!} t^{i+k+1} e^{-\alpha_{i,j} t} \mathbb{1}_{\alpha_{i,j} = \beta_{k,l}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \sum_{d=0}^i \sum_{k=0}^{mY} \sum_{l=1}^{pY_k} \binom{i}{d} \frac{(-1)^{i-d} (k+i-d)! a_{i,j} b_{k,l}}{(\beta_{k,l} - \alpha_{i,j})^{k+i-d+1}} t^d e^{-\alpha_{i,j} t} \mathbb{1}_{\alpha_{i,j} \neq \beta_{k,l}} + \\ &+ \sum_{k=0}^{mY} \sum_{l=1}^{pY_k} \sum_{d=0}^k \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \binom{k}{d} \frac{(-1)^{k-d} (i+k-d)! a_{i,j} b_{k,l}}{(\alpha_{i,j} - \beta_{k,l})^{i+k-d+1}} t^d e^{-\beta_{k,l} t} \mathbb{1}_{\alpha_{i,j} \neq \beta_{k,l}} \quad (2.13) \end{aligned}$$

Na koniec określimy jeszcze zachowanie zmiennej  $SUMA$  dla zmiennej  $\varepsilon$ :

$$SUMA(\varepsilon, X) = SUMA(X, \varepsilon) = X \quad (2.14)$$

## 2.6. Maksimum

Zajmiemy się teraz zmienną losową będącą maksimum  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$ . Zmienną tę będziemy oznaczać  $MAX(X_1, \dots, X_n)$ , jej gęstość przez  $max_{X_1, \dots, X_n}$ , a dystrybuantę przez  $MAX_{X_1, \dots, X_n}$ .

**Lemat 2.6.1** *Dla maksimum niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  zachodzą następujące wzory:*

$$MAX(X_1, \dots, X_n) = MAX(X_{\delta(1)}, \dots, X_{\delta(n)}) \quad \delta \in S_n \quad (2.15)$$

$$MAX(X_1, \dots, X_n)(t) = MAX(MAX(X_1, \dots, X_{n-1}), X_n) \quad (2.16)$$

**Dowód:**

Wzory te wynikają bezpośrednio z własności funkcji  $\max$  — jej przemienności i łączności.  $\square$

Z lematu tego wynika, że żeby wyznaczyć rozkład maksimum  $n$  zmiennych losowych musimy jedynie umieć wyznaczyć rozkład maksimum dla pary zmiennych. Tym zagadnieniem się teraz zajmiemy. Będziemy chcieli wyznaczyć gęstość rozkładu maksimum dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o gęstościach  $f(x)$  i  $g(x)$  odpowiednio, gdzie  $f(x)$  i  $g(x)$  są postaci 2.5 i są zdefiniowane następująco:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} x^i e^{-\alpha_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} b_{i,j} x^i e^{-\beta_{i,j} x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

**Lemat 2.6.2** *Dystrybuanta maksimum dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  o dystrybuantach  $F$  i  $G$  wyraża się wzorem:*

$$\text{MAX}_{X,Y}(t) = F(t)G(t) \quad (2.17)$$

**Dowód:**

$$\begin{aligned} \text{MAX}_{X,Y}(t) &= \mathbb{P}(\text{MAX}(X,Y) \leq t) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t \wedge Y \leq t) = \\ &= \mathbb{P}(X \leq t) \mathbb{P}(Y \leq t) = F(t)G(t) \end{aligned}$$

 $\square$ 

Wobec tego gęstość zmiennej  $\text{MAX}_{X,Y}$  jest równa:

$$\max_{X,Y}(t) = \text{MAX}'_{X,Y}(t) = (F(t)G(t))' = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t)$$

Zauważmy, że dla  $t < 0$  mamy  $\max_{XY}(t) = 0$ , wobec tego rachunki będziemy kontynuować przy założeniu, że  $t \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \max_{X,Y}(t) &= \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} t^i e^{-\alpha_{i,j} t} \right) \left( \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} \frac{b_{i,j}}{\beta_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} \sum_{k=0}^i \frac{b_{i,j}}{\beta_{i,j}^{i-k+1}} \frac{i!}{k!} t^k e^{-\beta_{i,j} t} \right) + \\ &\quad \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \sum_{k=0}^i \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i-k+1}} \frac{i!}{k!} t^k e^{-\alpha_{i,j} t} \right) \left( \sum_{i=0}^{\text{mY}} \sum_{j=1}^{\text{pY}_i} b_{i,j} t^i e^{-\beta_{i,j} t} \right) = \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} a_{i,j} t^i e^{-\alpha_{i,j} t} \right) \left( \sum_{m=0}^{\text{mY}} \sum_{n=1}^{\text{pY}_m} \frac{b_{m,n}}{\beta_{m,n}^{m+1}} m! - \sum_{m=0}^{\text{mY}} \sum_{n=1}^{\text{pY}_m} \sum_{l=0}^m \frac{b_{m,n}}{\beta_{m,n}^{m-l+1}} \frac{m!}{l!} t^l e^{-\beta_{m,n} t} \right) + \\ &\quad \left( \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! - \sum_{i=0}^{\text{mX}} \sum_{j=1}^{\text{pX}_i} \sum_{k=0}^i \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i-k+1}} \frac{i!}{k!} t^k e^{-\alpha_{i,j} t} \right) \left( \sum_{m=0}^{\text{mY}} \sum_{n=1}^{\text{pY}_m} b_{m,n} t^m e^{-\beta_{m,n} t} \right) \end{aligned}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy końcowy wzór na gęstość  $max_{X,Y}$  (dla  $t \geq 0$ ):

$$\begin{aligned}
max_{X,Y}(t) = & \left( \sum_{m=0}^{mY} \sum_{n=1}^{pY_m} \frac{b_{m,n}}{\beta_{m,n}^{m+1}} m! \right) \left( \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} a_{i,j} t^i e^{-\alpha_{i,j}t} \right) + \\
& - \left( \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \sum_{m=0}^{mY} \sum_{n=1}^{pY_m} \sum_{l=0}^m \frac{a_{i,j} b_{m,n} m!}{\beta_{m,n}^{m-l+1} l!} t^{l+i} e^{-(\alpha_{i,j}+\beta_{m,n})t} \right) + \\
& \left( \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \frac{a_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{i+1}} i! \right) \left( \sum_{m=0}^{mY} \sum_{n=1}^{pY_m} b_{m,n} t^m e^{-\beta_{m,n}t} \right) + \\
& - \left( \sum_{m=0}^{mY} \sum_{n=1}^{pY_m} \sum_{i=0}^{mX} \sum_{j=1}^{pX_i} \sum_{k=0}^i \frac{a_{i,j} b_{m,n} i!}{\alpha_{i,j}^{i-k+1} k!} t^{k+m} e^{-(\alpha_{i,j}+\beta_{m,n})t} \right) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze określić zachowanie zmiennej  $MAX$  dla zmiennej  $\varepsilon$ . Robimy to w następujący sposób:

$$MAX(\varepsilon, X) = MAX(X, \varepsilon) = X \quad (2.19)$$

## Rozdział 3

# Analiza sieci przepływów pracy z czasem

W tym rozdziale rozszerzymy model sieci Petriego otrzymywanych za pomocą metody rozdrobnień o czas. Głównym naszym celem będzie znalezienie metody na wyznaczenie gęstości rozkładu zmiennej losowej oznaczającej czas działania sieci przepływu pracy. Postaramy się to zrobić na podstawie jej drzewa rozdrobnień. W kolejnych podrozdziałach przeanalizujemy reguły rozdrobnień i dla każdej z nich spróbujemy wyprowadzić odpowiadającą jej regułę wyznaczania gęstości. Jeden z podrozdziałów poświęcimy też na przegląd niektórych znanych metod badania sieci stochastycznych.

### 3.1. Rozszerzenie sieci otrzymanych metodą rozdrobnień o czas

Proponowane rozszerzenie jest proste i narzucające się. W modelu sieci przepływu pracy otrzymywanych metodą rozdrobnień przedstawionych w rozdziale 1.3 dla każdej tranzycji sieci określimy jej rodzaj — czy jest czasowa czy natychmiastowa, a także w zależności od rodzaju — współczynnik rozkładu wykładniczego lub wagę odpowiednio. W ten sposób uzyskamy uogólnioną stochastyczną sieć Petriego (rozdział 1.5.2). Działanie sieci będzie zgodne z zasadami działania odpowiedniej sieci stochastycznej. W dalszej części pracy wynikną pewne ograniczenia dotyczące rodzajów tranzycji. W szczególności będziemy wymagać, żeby lokalnie w chwili wyboru tranzycji wszystkie tranzycje były tego samego typu.

### 3.2. Przegląd metod

W podrozdziale tym przyjrzymy się pokrótce różnym metodom stosowanym przy analizie zachowania w czasie stochastycznych sieci Petriego. Będzie nas interesowało przede wszystkim wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa tego, że w danej chwili sieć znajduje się w określonym stanie.

#### 3.2.1. Równania

Metody tu opisane polegają na przekształceniu sieci Petriego do odpowiadającego jej łańcucha Markowa  $X$ , a następnie znalezieniu macierzy  $\Pi(t)$ , gdzie:

$$\Pi(t)_{i,j} = \mathbb{P}(X(t' + t) = s_j \mid X(t') = s_i)$$

Macierz ta spełnia prospektywne i retrospektywne równania Kołmogorowa [13]:

$$\begin{aligned}\Pi'(t) &= \Pi(t)Q \\ \Pi'(t) &= Q\Pi(t),\end{aligned}$$

gdzie  $Q$  oznacza operator infinitesimalny badanego procesu Markowa. Każde z tych równań określa układ równań różniczkowych zwyczajnych. W pracy [9] wymieniane są co najmniej cztery metody rozwiązywania tego równania: metoda Eulera, rozwiązanie przez rozwinięcie w szereg Taylora, metody Rungego-Kutty oraz metoda transformacji Laplace'a.

Inna metoda, również opisana w pracy [9], polega na zauważeniu, że rozwiązaniem retrospektywnych równań Kołmogorowa jest:

$$\Pi(t) = e^{Qt}, \quad (3.1)$$

gdzie  $e^{Qt}$  jest zdefiniowane następująco:

$$e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k \frac{t^k}{k!}$$

Mając macierz  $\Pi(t)$  możemy wyznaczyć wektor  $\pi(t)$  wprowadzony w rozdziale 1.4.2.

$$\pi(t) = \pi(0)\Pi(t) = \pi(0)e^{Qt} \quad (3.2)$$

Zauważmy jeszcze tylko, że macierz  $\Pi(t) = H(0, t)$ , gdzie  $H$  jest macierzą wprowadzoną w rozdziale 1.4.2, a wzór 3.2 zgadza się ze wzorem 1.7.

We wspomnianej wyżej pracy [9] autorzy wskazują kilka metod obliczenia wielkości  $e^{Qt}$ , zaznaczając jednak, że nie są to metody pozbawione wad. Głównym problemem zdaniem autorów są słabe własności numeryczne tych metod.

### 3.2.2. Unifikacja

Metoda unifikacji została po raz pierwszy zaproponowana przez A. Jensena i dlatego też zwana jest czasem metodą Jensena. Zdaniem autorów pracy [9] jest to metoda, która w ostatnich latach zyskała największą popularność i jest najczęściej stosowana w praktyce. Zgodnie z opisem umieszczonym w pracy [16] metoda ta polega na przekształceniu łańcucha Markowa z czasem ciągłym odpowiadającego sieci Petriego na dyskretny łańcuch Markowa podporządkowany procesowi Poissona. Macierz przejścia dyskretnego łańcucha Markowa dana jest wzorem:

$$Q^* = \frac{Q}{\Lambda} + I,$$

gdzie  $Q$  tak jak poprzednio jest operatorem infinitesimalnym oryginalnego procesu Markowa, a  $\Lambda$  spełnia zależność  $\Lambda \geq \max_{1 \leq i \leq N} |q_{ii}|$ .

Daje się wykazać ([16]), że wówczas:

$$\pi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \quad (3.3)$$

gdzie  $\pi(t) = \{\pi_1(t), \dots, \pi_N(t)\}$ ,  $\pi_i(t)$  oznacza prawdopodobieństwo, że oryginalny łańcuch w chwili  $t$  znajduje się w stanie  $s_i$ , a  $P(n)$  oznacza analogiczny wektor dla dyskretnego łańcucha Markowa w chwili  $n$  (tym razem czas jest zdyskretyzowany).



Wektor prawdopodobieństwa  $P(n)$  może być wyznaczony rekurencyjnie z następujących zależności:

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1)Q^* \\ P(0) &= \pi(0) \end{aligned}$$

Mając dany wektor  $P(n)$ , szukany wektor  $\pi(t)$  może być wyznaczony za pomocą wzoru 3.3.

### 3.2.3. Techniki agregacyjne

Często wykorzystywaną metodą przy wyznaczaniu interesującego nas rozkładu prawdopodobieństwa są tzw. techniki agregacyjne. W pracy tej przedstawione zostaną jedynie cechy łączące metody z tej grupy. Zgodnie z [3] techniki agregacyjne polegają na rozwiązaniu zadanego problemu poprzez rozbitcie go na mniejsze podproblemy w sposób charakterystyczny dla danej metody, rozwiązaniu podproblemów, a następnie odpowiednim połączeniu otrzymanych wyników. Przykładowym sposobem dzielenia problemu głównego na mniejsze jest metoda Takahashiego ([18]). Opiera się ona na obserwacji, że dla danego podziału przestrzeni stanów łańcucha Markowa zbiór równań Kołmogorowa może zostać podzielony na dwie części — jedną uwzględniającą połączenia między różnymi częściami podziału i drugą uwzględniającą połączenia wewnątrz części. Innym przykładem techniki agregacyjnej jest metoda Courtoisa ([8]). Działa ona dla łańcuchów Markowa, których macierz przejścia może być przekształcona do postaci blokowo-diagonalnej w taki sposób, żeby połączenia wewnątrz bloków dominowały nad połączeniami pomiędzy blokami. Opis innych metod agregacyjnych można znaleźć, między innymi w pracach [3] i [17].

### 3.2.4. Metody wykorzystujące budowę sieci

Oddzielną grupę stanowią metody wykorzystujące strukturę i własności badanej sieci. Przykładem takiej metody jest algorytm zaproponowany w pracy [15]. Autorzy rozważają w niej sieci acykliczne i wykorzystują własność braku cykli do sprytnego rozwiązywania układu równań całkowych Kołmogorowa:

$$\pi_j(t) = \mathbb{1}_{(i=j)} e^{-\int_0^t q_{ii} dy} + \int_0^t \left( \sum_{k \neq j} \pi_k(x) q_{kj} e^{-\int_x^t q_{jj} dy} \right) dx$$

Poszczególne stany łańcucha Markowa są sortowane według częściowego porządku indukowanego przez tranzycje pomiędzy nimi. Następnie dla każdego stanu wyznaczana jest wartość  $\pi_j(t)$ , która zależy jedynie od stanów wcześniej rozpatrzonych. Zaproponowany przez autorów algorytm wyznacza szukany rozkład prawdopodobieństwa jako funkcję od czasu  $t$ , a także umożliwia operowanie na symbolach. Dodatkową jego zaletą jest lepsza złożoność czasowa w porównaniu z innymi metodami.

### 3.2.5. Symulacja

Zupełnie inną kategorią metod badania własności stochastycznych sieci Petriego jest ich symulacja. Temat symulacji jest poruszany między innymi w książkach [14] i [11]. Metoda symulacji została wykorzystana również w bliźniaczej pracy magisterskiej *"Symulacyjne badanie stochastycznych hierarchicznych sieci przepływu pracy"* pisanej przez Pawła Findeisena.

### 3.2.6. Podsumowanie

Z powyższego krótkiego przeglądu metod stosowanych przy badaniu stochastycznych sieci Petriego możemy wysnuć kilka wniosków. Po pierwsze duża liczba metod i prac im poświęconych świadczy o tym, że zagadnienie to jest ważne. Po drugie wszystkie przedstawione metody, poza symulacją, w pierwszym kroku muszą przekształcić badaną sieć do odpowiadającego jej łańcucha Markowa. Rodzi to dodatkowe problemy związane przede wszystkim z rozmiarem potencjalnej przestrzeni stanów. Istnieją osobne prace poświęcone tylko odpowiedniej reprezentacji danych w pamięci (np. [4], [7], [10]). Ponadto duża część metod prowadzi jedynie do wyników przybliżonych, a rozkłady prawdopodobieństwa liczone są dla konkretnego momentu. Zaletą przedstawionych technik jest zwykle ich duża ogólność — działają one dobrze dla prawie dowolnych sieci oraz to, że dostajemy wynik dla wszystkich stanów sieci.

### 3.3. Założenia

Poniżej przedstawione zostaną założenia i oznaczenia, z których będziemy korzystać w dalszej części tego rozdziału, przy wyprowadzaniu reguł pozwalających wyznaczać rozkład czasu działania sieci.

Z każdym węzłem drzewa rozdrobnień będziemy wiązali zmienną losową oznaczającą czas działania fragmentu sieci przepływu pracy odpowiadającego poddrzewu o korzeniu w tym węźle. Na początku przypiszemy zmienne losowe wszystkim liściom drzewa - a więc właściwym tranzycjom i miejscom w sieci. Każdej tranzycji czasowej przypiszemy zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem, którego sposób wyliczenia zostanie przedstawiony w dalszej części pracy. Z tranzycjami natychmiastowymi i miejscami wiążemy natomiast zmienne  $\varepsilon$ , które zostały wprowadzone w rozdziale 2.3. Dla przypomnienia, zmienne te mają rozkład punktowy mówiący, że czas przejścia jest równy 0 z prawdopodobieństwem 1. Dla tranzycji  $T$  i miejsca  $P$  opisywana wyżej zmienna losowa będzie oznaczana odpowiednio przez  $X_T$  i  $X_P$ . Ponadto z niektórymi węzłami w drzewie rozdrobnień wiążąc będziemy dodatkowe parametry, które zostaną omówione dalej. Naszym zadaniem będzie znalezienie metody wyznaczania rozkładu wszystkich pozostałych, wewnętrznych węzłów drzewa. Rozkład otrzymany w korzeniu będzie rozkładem czasu przejścia przez całą sieć.

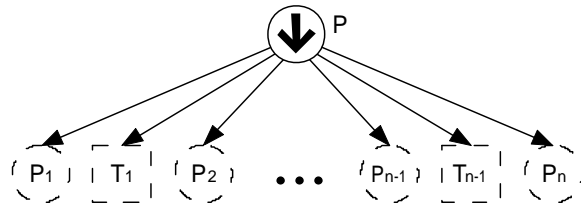
Rysunki umieszczone w kolejnych podrozdziałach będą przedstawiały jedynie rzeczy istotne dla dalszych rozważań. Tranzycje i miejsca narysowane linią przerywaną (na rysunkach fragmentów drzewa rozdrobnień) będą oznaczały, że na odpowiednich miejscach może stać zarówno liść (a więc właściwa tranzycja lub miejsce) jak i całe poddrzewo o korzeniu w danym węźle narysowanym linią przerywaną. Natomiast na rysunkach fragmentów sieci będziemy wykorzystywać symbol chmurki. Węzły sieci otoczone chmurką będą oznaczały, że w danym miejscu może znajdować się większy fragment sieci (odpowiadający poddrzewu drzewa rozdrobnień zaczepionym w danym węźle).

### 3.4. Rozbicie sekwencyjne miejsca

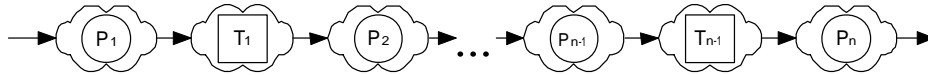
Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem reguły dla uogólnionego rozbicia sekwencyjnego miejsca. Fragment drzewa rozdrobnień dla tego rozbicia przedstawiony jest na rysunku 3.1. Fragment ten odpowiada kawałkowi sieci przepływu pracy z rysunku 3.2.

**Lemat 3.4.1** *Dla oznaczeń z rysunku 3.1 zachodzi równość:*

$$X_P = SUMA(X_{P_1}, X_{T_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, X_{P_n}) \quad (3.4)$$



Rysunek 3.1: Rozbicie sekwencyjne miejsca



Rysunek 3.2: Fragment sieci odpowiadający rozbitemu sekwencyjnie miejscu

**Dowód:** Z własności sieci przepływu pracy otrzymanej metodą rozdrobnień wynika, że przejście przez fragment sieci z rysunku 3.2 wymaga przejścia kolejno przez wszystkie wyróżnione części (żadna z następujących po sobie części sieci nie może rozpocząć się bez pełnego przejścia pionków przez poprzednią część). Stąd wynika, że czas przejścia przez ten fragment sieci jest równy sumie czasów przejść przez wszystkie jego części składowe, a więc:

$$X_P = \text{SUMA}(X_{P_1}, X_{T_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, X_{P_n})$$

□

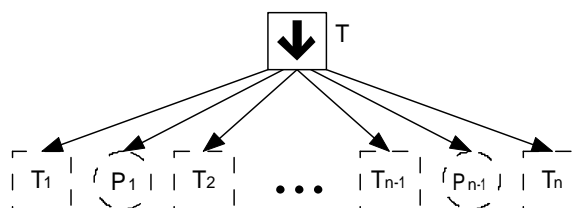
**Wniosek 3.4.2** Jesteśmy w stanie wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X_P$ .

**Dowód:** Teza łatwo wynika z założenia, że znamy rozkłady wszystkich zmiennych losowych  $X_{P_1}, X_{T_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_{n-1}}, X_{T_{n-1}}, X_{P_n}$ , z lematów 2.5.1 i 3.4.1 oraz wzorów 2.13 i 2.14.

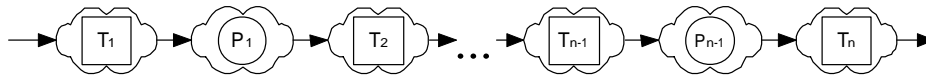
□

### 3.5. Rozbicie sekwencyjne tranzycji

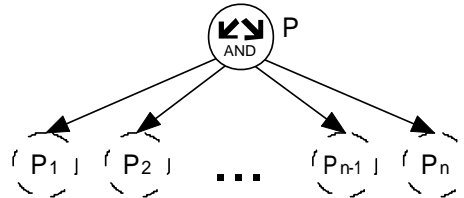
W podrozdziale tym znajdziemy regułę pozwalającą liczyć rozkład zmiennej przypisanej tranzycji, dla której zastosowano uogólnione rozbicie sekwencyjne. Reguła rozbicia sekwencyjnego tranzycji ma reprezentację w drzewie rozdrobnień przedstawioną na rysunku 3.3. Ten fragment drzewa rozdrobnień odpowiada pokazanemu na rysunku 3.4 kawałkowi sieci przepływu pracy.



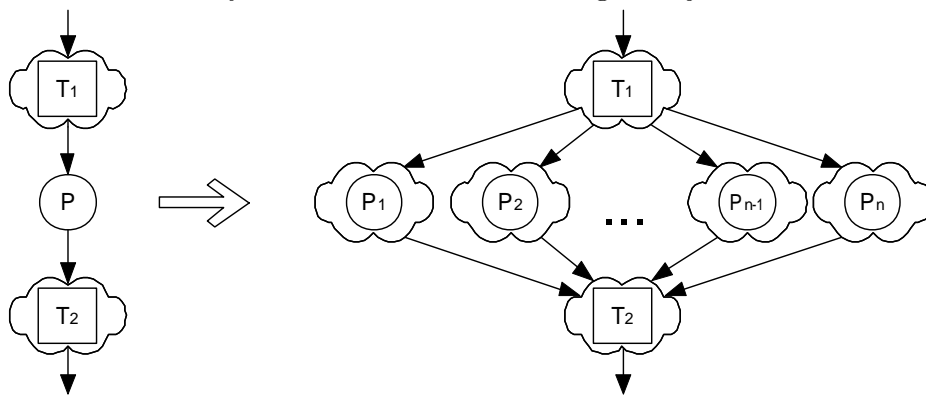
Rysunek 3.3: Rozbicie sekwencyjne tranzycji



Rysunek 3.4: Fragment sieci odpowiadający rozbitej sekwencyjnie tranzycji



Rysunek 3.5: Rozbicie równoległe miejsca



Rysunek 3.6: Fragment sieci przed i po rozbiciu równoległym miejsca

**Lemat 3.5.1** Dla oznaczeń z rysunku 3.3 zachodzi równość:

$$X_T = SUMA(X_{T_1}, X_{P_1}, X_{T_2}, \dots, X_{T_{n-1}}, X_{P_{n-1}}, X_{T_n}) \quad (3.5)$$

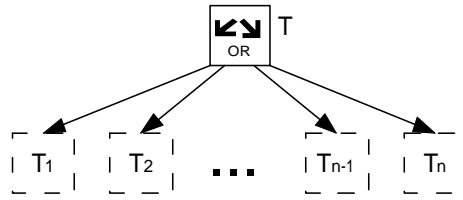
**Dowód:** Dowód przebiega bardzo podobnie do dowodu lematu 3.4.1. □

**Wniosek 3.5.2** Jesteśmy w stanie wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X_T$ .

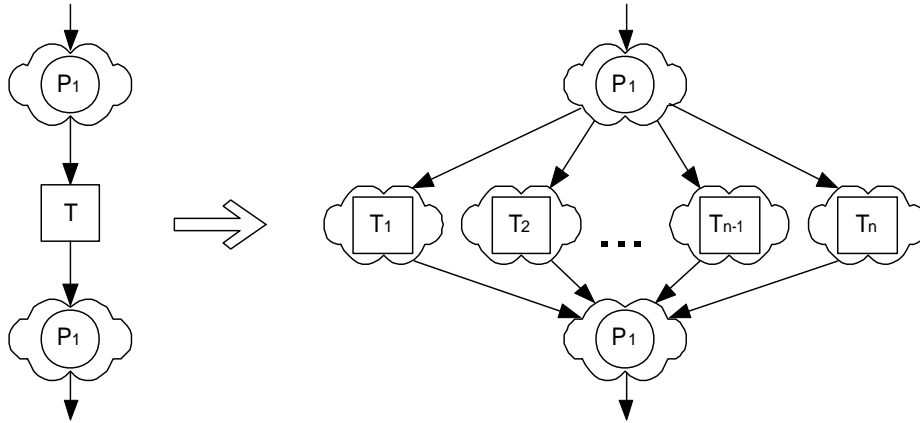
**Dowód:** Teza łatwo wynika z założenia, że znamy rozkłady wszystkich zmiennych losowych  $X_{T_1}, X_{P_1}, X_{T_2}, \dots, X_{T_{n-1}}, X_{P_{n-1}}, X_{T_n}$ , z lematów 2.5.1 i 3.5.1 oraz wzorów 2.13 i 2.14. □

### 3.6. Rozbicie równoległe miejsca

Wyprowadzimy teraz regułę pozwalającą wyznaczać rozkład zmiennej losowej związanej z miejscem, które zostało rozbite równoległe. Rozważać będziemy przypadek uogólnionego rozbicia na  $n$  miejsc. Na rysunku 3.5 przedstawiony został fragment drzewa rozdrobnień dla rozbitego miejsca  $P$ . Rysunek 3.6 ukazuje fragment sieci przepływu pracy przed rozbiciem równoległym miejsca  $P$  oraz ten sam fragment po zastosowaniu reguły rozbicia (w pierwszym kroku) oraz być może dalszych reguł na nowo powstałych węzłach.



Rysunek 3.7: Rozbicie wyboru tranzycji



Rysunek 3.8: Fragment sieci przed i po rozbiciu wyboru tranzycji

**Lemat 3.6.1** Dla oznaczeń z rysunku 3.5 zachodzi równość:

$$X_P = \text{MAX}(X_{P_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_n}) \quad (3.6)$$

**Dowód:** Z własności sieci przepływów pracy otrzymanych metodą rozdrobnień wynika, że aby tranzycja  $T_2$  mogła odpalić, wszystkie podsieci otrzymane w wyniku zastosowania reguł rozdrobnień na miejscach  $P_1, \dots, P_n$  muszą się wykonać w całości (każda z tych podsieci kończy się miejscem (lub być może miejscami) bezpośrednio połączonym z tranzycją  $T_2$ ). Czas przejścia przez każdą z podsieci dany jest zmienną losową — odpowiednio  $X_{P_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_n}$ . Stąd wnioskujemy, że czas przejścia przez fragment sieci uzyskany z rozbicia równoległego miejsca  $P$  jest równy maksimum ze wszystkich tych czasów, a więc:

$$X_P = \text{MAX}(X_{P_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_n})$$

□

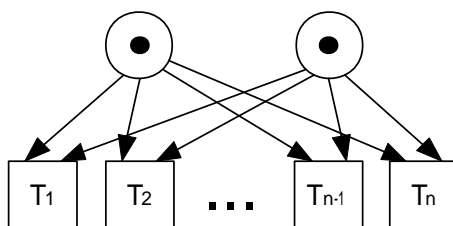
**Wniosek 3.6.2** Jesteśmy w stanie wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X_P$ .

**Dowód:** Teza łatwo wynika z założenia, że znamy rozkłady wszystkich zmiennych losowych  $X_{P_1}, X_{P_2}, \dots, X_{P_n}$ , z lematów 2.6.1 i 3.6.1 oraz wzorów 2.18 i 2.19.

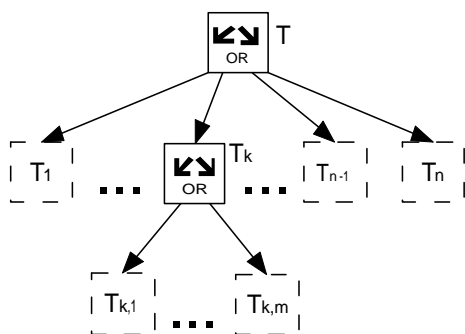
□

### 3.7. Rozbicie wyboru tranzycji

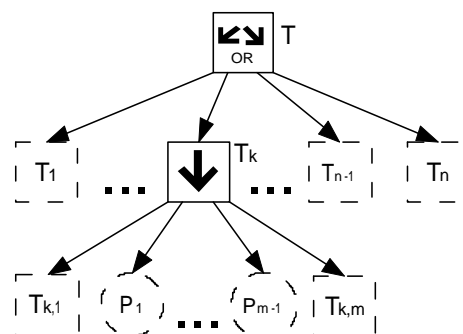
Ten podrozdział poświęcimy na wyprowadzenie reguły pozwalającej wyznaczać rozkład zmiennej losowej związanej z tranzycją, dla której została zastosowana reguła rozbicia wyboru na



Rysunek 3.9: Wybór



Rysunek 3.10: Problem 1



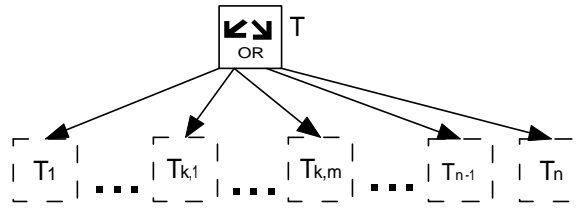
Rysunek 3.11: Problem 2

$n$  tranzycji. Tranzycję taką będziemy nazywać *tranzycją wyboru*. Na rysunku 3.7 przedstawiony został odpowiedni fragment drzewa rozdrobnień. Rysunek 3.8 ukazuje fragment sieci przepływu pracy przed rozbięciem wyboru tranzycji  $T$  oraz ten sam fragment po zastosowaniu reguły rozbicia (w pierwszym kroku) oraz ewentualnie dalszych reguł na nowo powstałych węzłach.

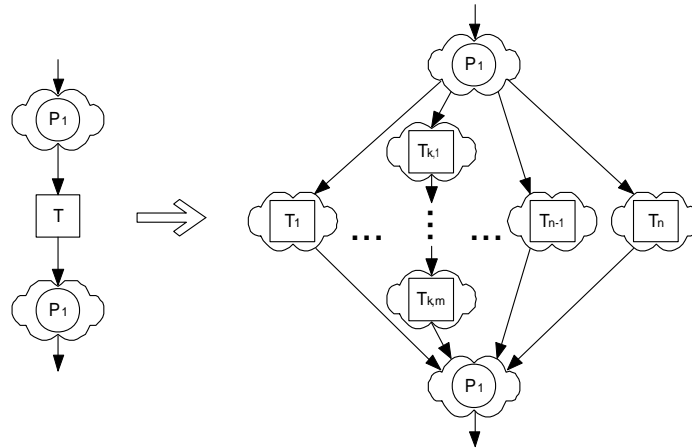
Tym razem sytuacja jest trochę inna niż w poprzednich przypadkach. Chodzi tu o semantykę zachowania sieci stochastycznej w momencie, gdy aktywnych jest kilka tranzycji. W sytuacji przedstawionej na rysunku 3.9 (liczba miejsc na górze nie ma dla naszych rozważań znaczenia) możemy założyć, że wszystkie tranzycje są tego samego typu — czasowe albo natychmiastowe (w przypadku wystąpienia obu typów tranzycje czasowe nigdy nie odpalą i wobec tego możemy je wówczas pominąć). Przyjmujemy, że tranzycja  $T_i$  ma przypisany współczynnik  $\lambda_i$ . Jeśli tranzycje są czasowe, to zgodnie ze wzorem 2.4 tranzycja  $T_i$  odpali z prawdopodobieństwem  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$  po czasie z rozkładem  $Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$  na mocy 2.3. Natomiast w przypadku tranzycji natychmiastowych wiemy, że prawdopodobieństwo odpalenia będzie takie samo jak poprzednio, z tym że odbędzie się to w czasie zerowym, a więc czas przejścia przez fragment sieci odpowiadający rozważanej sytuacji wyboru opisuje w tym przypadku zmienna losowa  $\varepsilon$ .

Zastanówmy się jak te obserwacje wpływają na nasze rozważania dotyczące wyprowadzania reguły na rozkład zmiennej związanej z tranzycją  $T$  z rysunku 3.7. Zauważmy, że żeby móc określić zachowanie sieci (a więc i rozkład) w rozpatrywanej sytuacji musimy znać współczynniki wszystkich aktywnych w tym momencie tranzycji. Spróbujemy je teraz znaleźć. Potencjalne problemy mogą stwarzać sytuacje przedstawione na rysunkach 3.10 i 3.11.

W pierwszej z przedstawionych sytuacji możemy zastosować regułę kontrakcji. Otrzymujemy wówczas sytuację przedstawioną na rysunku 3.12. Jeśli zajdzie taka potrzeba kontrakcję powtarzamy do momentu, gdy wśród synów rozbijanej tranzycji  $T$  nie będzie żadnej tranzycji wyboru. W ten sposób sytuację pierwszą jesteśmy zawsze w stanie sprowadzić do sytuacji



Rysunek 3.12: Rozwiązanie problemu 1



Rysunek 3.13: Fragment sieci dla problemu 2

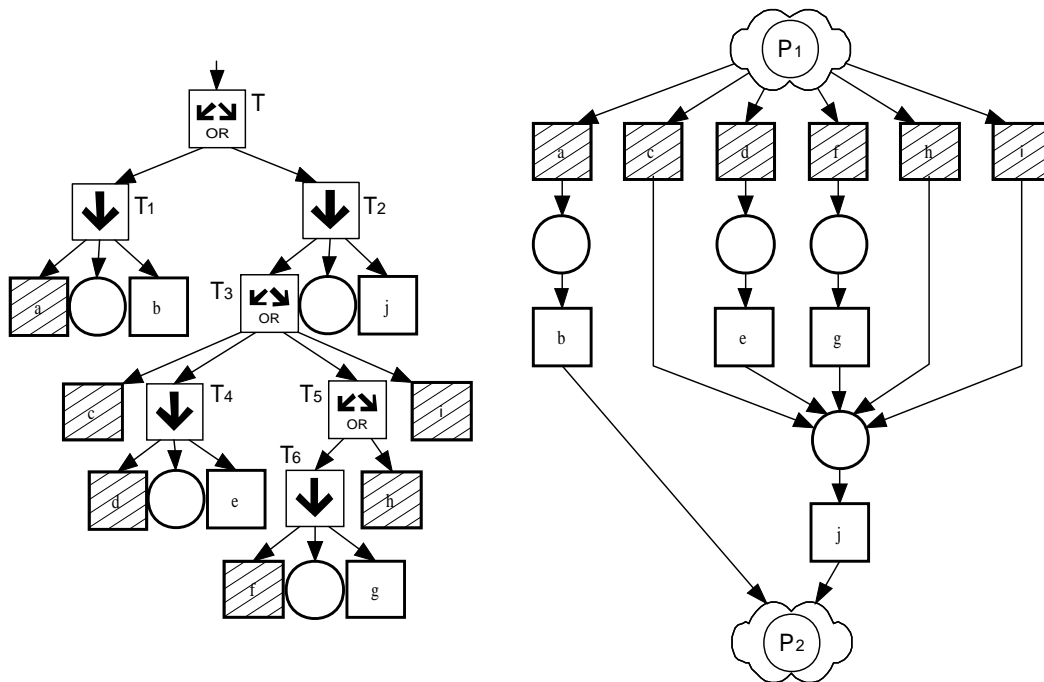
drugiej.

Drugi z problemów zobrazujemy jeszcze odpowiadającym mu fragmentem sieci przepływu pracy (rysunek 3.13). Z rysunku tego wynika, że jedynym węzłem drzewa rozdrobień (spośród  $T_{k,1}, \dots, T_{k,m}$ ), istotnym dla naszych rozważań jest tranzycja  $T_{k,1}$ , a właściwie poddrzewo w niej zaczepione. W tym momencie widzimy, że jedna z tranzycji powstałych w wyniku rozbicia sekwencyjnego powinna być wyróżniona. Tranzycją wyróżnioną będzie oczywiście pierwsza tranzycja z rozbicia sekwencyjnego. Będziemy ją czasem nazywać skrajnie lewym synem. Jeśli tranzycja ta jest liściem, to będzie to jedyna tranzycja (z poddrzewa o korzeniu w  $T_k$ ), której współczynnik będzie istotny przy liczeniu końcowego rozkładu. W przeciwnym razie możliwe są dwa przypadki. Tranzycja  $T_{k,1}$  może być rozbita sekwencyjnie i wówczas musimy spojrzeć na jej skrajnie lewego syna. Drugi przypadek dotyczy rozbicia wyboru tranzycji  $T_{k,1}$ . Wtedy wszyscy jej synowie muszą być rozpatrzeni w analogiczny sposób. Na rysunku 3.14 przedstawiony jest przykładowy fragment drzewa rozdrobień oraz odpowiadający mu fragment sieci z zaznaczonymi tranzycjami, których współczynniki będą istotne przy liczeniu rozkładu zmiennej związanej z korzeniem  $T$  (a więc czasu przejścia pomiędzy chmurkami). Do przykładu tego jeszcze wrócimy.

Dzięki powyższym rozważaniom wiemy w jaki sposób dla danego węzła drzewa wyznaczyć wszystkie tranzycje, których współczynniki będą potrzebne do policzenia rozkładu dla tego węzła. Zdefiniujemy teraz pojęcie wagi węzła.

**Definicja 3.7.1** Każdej tranzycji  $T$  przypisujemy wagę  $w(T)$  zdefiniowaną następująco:

$$w(T) = \begin{cases} \lambda & \text{jeśli } T \text{ jest tranzycją o współczynniku } \lambda \\ w(T_1) & \text{jeśli } T \text{ jest rozbita sekwencyjnie na } T_1, P_1, \dots, P_{n-1}, T_n \\ w(T_1) + \dots + w(T_n) & \text{jeśli dla } T \text{ zastosowano rozbicie wyboru na } T_1, \dots, T_n \end{cases}$$



Rysunek 3.14: Fragment drzewa rozdrobnień i odpowiadający mu fragment sieci z zaznaczonymi istotnymi tranzycjami

**Przykład:** Dla drzewa z rysunku 3.14 wagi węzłów wewnętrznych są następujące:  $w(T_6) = f$ ,  $w(T_5) = f + h$ ,  $w(T_4) = d$ ,  $w(T_2) = w(T_3) = c + d + f + h + i$ ,  $w(T_1) = a$ ,  $w(T) = a + c + d + f + h + i$ .

**Definicja 3.7.2** *Tranzycja aktywna w poddrzewie drzewa rozdrobnień o korzeniu w węźle  $T$  to tranzycja, która jest liściem i spełnia jedną z własności:*

- *jest synem tranzycji  $T$*
- *jest skrajnie lewym synem tranzycji rozbitej sekwencyjnie, do której daje się dojść od węzła  $T$  po ścieżce złożonej jedynie z tranzycji wyboru i tranzycji rozbitych sekwencyjnie, przy czym w węźle rozbitym sekwencyjnie można pójść tylko przez jego pierwszego syna (skrajnie lewą tranzycję)*
- *jest dowolnym synem tranzycji wyboru, do której daje się dojść po ścieżce takiego samego typu co w podpunkcie poprzednim*

**Przykład:**

Na rysunku 3.14 tranzycja aktywna dla poddrzewa o korzeniu w węźle  $T_6$  jest tranzycja ze współczynnikiem  $f$ . Dla poddrzewa o korzeniu w węźle  $T_5$  tranzycje aktywne to tranzycje ze współczynnikami  $f$  i  $h$ . Dla poddrzewa o korzeniu w węźle  $T_2$  tranzycje aktywne to tranzycje ze współczynnikami  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $h$  i  $i$ .

**Lemat 3.7.3** *Waga tranzycji wyboru jest równa sumie wag tranzycji aktywnych w poddrzewie o korzeniu w tej tranzycji.*

**Dowód:** Własność ta wynika z analogii pomiędzy definicją wagi tranzycji a definicją tranzycji istotnej. □



Intuicja stojąca za pojęciem tranzycji aktywnych w poddrzewie o korzeniu w węźle  $T$  jest taka, że są to tranzycje aktywowane jednocześnie w momencie gdy "aktywny" staje się węzeł  $T$ . Pojęcie tranzycji aktywnych wykorzystamy przy definiowaniu tranzycji istotnych. Wcześniej jednak musimy zdefiniować tranzycje głównego wyboru.

**Definicja 3.7.4** *Tranzycją głównego wyboru w drzewie rozdrobnień będziemy nazywać taką tranzycję wyboru, która jako ojca ma miejsce rozbite sekwencyjnie lub tranzycję rozbitą sekwencyjnie, przy czym w tym drugim przypadku nie jest jej pierwszym (skrajnie lewym) synem.*

**Przykład:** Na rysunku 3.14 jedyną tranzycją głównego wyboru jest tranzycja  $T$  (przy założeniu, że jej ojcem jest miejsce rozbite sekwencyjnie lub tranzycja rozbita sekwencyjnie, przy czym wówczas  $T$  nie jest jej pierwszym synem).

**Definicja 3.7.5** *Tranzycja istotna to tranzycja aktywna w poddrzewie drzewa rozdrobnień o korzeniu w tranzycji wyboru głównego.*

Pojęciem tranzycji istotnej posługiwaliśmy się już wcześniej. Tranzycje istotne to takie tranzycje sieci, które są razem aktywowane przez jeden zbiór miejsc (rysunek 3.9). Prosty wniosek z lematu 3.7.3 jest następujący:

**Wniosek 3.7.6** *Waga tranzycji głównego wyboru jest równa sumie wag tranzycji istotnych w poddrzewie o korzeniu w tej tranzycji.*

Zgodnie z rozważaniami z początku tego podrozdziału, każda tranzycja istotna odpali po czasie zgodnym z rozkładem  $Exp(w(T))$ , gdzie  $T$  jest tranzycją głównego wyboru, będącą korzeniem poddrzewa, w którym zawarta jest dana tranzycja istotna. W rozważaniach tych nie uwzględniliśmy jednak jeszcze jednego faktu — tranzycja  $T$  może być jedną z kilku tranzycji głównego wyboru aktywnych w jednej chwili. Taka sytuacja będzie miała miejsce w przypadku pętli i zostanie rozważona w dalszej części tej pracy. Tak więc sformułowany powyżej fakt zachodzi przy założeniu, że tranzycja  $T$  nie jest tranzycją zaczynającą odnogę pętli ani tranzycją wyjściową z pętli. Odpowiednie definicje zostaną podane w podrozdziale dotyczącym pętli.

A oto główny lemat tego podrozdziału:

**Lemat 3.7.7** *Dla oznaczeń z rysunku 3.7 zachodzi:*

$$X_T \sim \frac{w(T_1)}{w(T)} f_{X_{T_1}}(x) + \dots + \frac{w(T_n)}{w(T)} f_{X_{T_n}}(x) \quad (3.7)$$

gdzie  $f_{X_{T_i}}$  oznacza gęstość zmiennej  $X_{T_i}$ .

**Dowód:** Na początku zauważmy, że podany wzór wyznacza gęstość.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{w(T_1)}{w(T)} f_{X_{T_1}}(x) + \dots + \frac{w(T_n)}{w(T)} f_{X_{T_n}}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{w(T_1)}{w(T)} f_{X_{T_1}}(x) dx + \dots + \int_{\mathbb{R}} \frac{w(T_n)}{w(T)} f_{X_{T_n}}(x) dx = \\ &= \frac{w(T_1)}{w(T)} \int_{\mathbb{R}} f_{X_{T_1}}(x) dx + \dots + \frac{w(T_n)}{w(T)} \int_{\mathbb{R}} f_{X_{T_n}}(x) dx = \\ &= \frac{w(T_1)}{w(T)} + \dots + \frac{w(T_n)}{w(T)} = \frac{w(T_1) + \dots + w(T_n)}{w(T_1) + \dots + w(T_n)} = 1 \end{aligned}$$

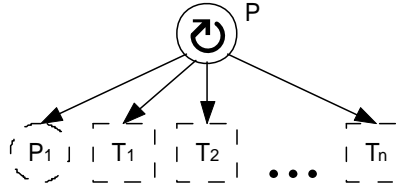
Rozważmy możliwe przypadki dla typu tranzycji  $T_i$ . Jeśli jest to tranzycja właściwa, to prawdopodobieństwo wyboru ścieżki zaczynającej się od tej tranzycji jest równe (na mocy lematu 2.4)  $\frac{\lambda_i}{\text{suma wag tranzycji aktywnych}}$ . Ponieważ  $w(T_i) = \lambda_i$ , a suma wag tranzycji aktywnych jest równa  $w(T)$ , więc prawdopodobieństwo to jest równe  $\frac{w(T_i)}{w(T)}$  i ostatecznie tranzycja  $T_i$  wniesie do rozkładu składnik  $\frac{w(T_i)}{w(T)} f_{X_{T_i}}$ . Jeśli tranzycja  $T_i$  jest tranzycją rozbitą sekwencyjnie, to prawdopodobieństwo wyboru wejścia do tej gałęzi będzie równe sumie prawdopodobieństw wejść do ścieżek zaczynających się od wszystkich tranzycji aktywnych w poddrzewie o korzeniu w  $T_i$ . Z lematu 3.7.3 wnioskujemy, że prawdopodobieństwo to będzie równe  $\frac{w(T_i)}{w(T)}$  i podobnie jak poprzednio do rozkładu dojdzie składnik  $\frac{w(T_i)}{w(T)} f_{X_{T_i}}$ . Analogiczna jak w przypadku tranzycji rozbitej sekwencyjnie argumentacja pozwala wnioskować, że tranzycja wyboru wniesie do rozkładu składnik  $\frac{w(T_i)}{w(T)} f_{X_{T_i}}$ . □

**Wniosek 3.7.8** *Jesteśmy w stanie wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X_T$ .*

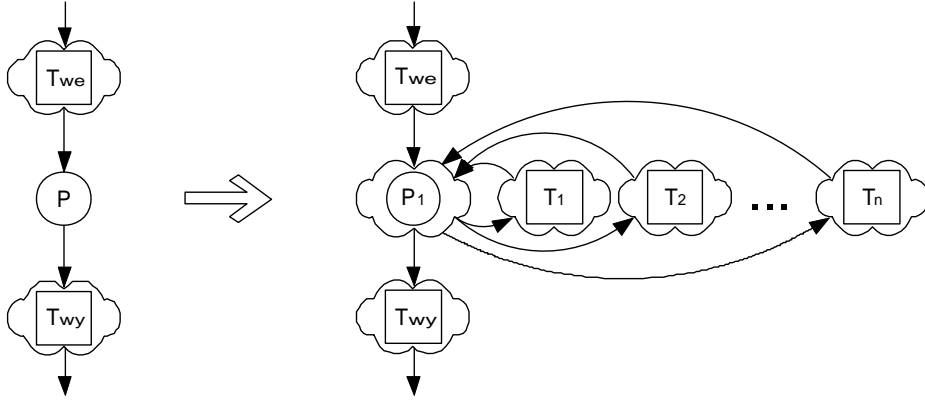
**Dowód:** Przy założeniu, że znamy rozkłady zmiennych  $T_1, \dots, T_n$ , wzór 3.7 wyznacza gęstość rozkładu zmiennej  $X_T$ . □

**Przykład:** Skorzystamy teraz ze zdefiniowanych reguł w celu wyznaczenia rozkładu zmiennej związanej z tranzycją  $T$  w drzewie z rysunku 3.14.

$$\begin{aligned}
f_{X_{T_1}}(x) &= s_{X_a, \varepsilon, X_b}(x) = s_{X_a, X_b}(x) \\
f_{X_{T_4}}(x) &= s_{X_d, \varepsilon, X_e}(x) = s_{X_d, X_e}(x) \\
f_{X_{T_6}}(x) &= s_{X_f, \varepsilon, X_g}(x) = s_{X_f, X_g}(x) \\
f_{X_{T_5}}(x) &= \frac{f}{f+h} f_{X_{T_6}}(x) + \frac{h}{f+h} f_{X_h} \\
f_{X_{T_3}}(x) &= \frac{c}{c+d+f+h+i} f_{X_c}(x) + \frac{d}{c+d+f+h+i} f_{X_{T_4}}(x) + \\
&+ \frac{f+h}{c+d+f+h+i} f_{X_{T_5}}(x) + \frac{i}{c+d+f+h+i} f_{X_i}(x) = \\
&= \frac{c}{c+d+f+h+i} f_{X_c}(x) + \frac{d}{c+d+f+h+i} s_{X_d, X_e}(x) + \\
&+ \frac{f}{c+d+f+h+i} s_{X_f, X_g}(x) + \frac{h}{c+d+f+h+i} f_{X_h}(x) + \\
&+ \frac{i}{c+d+f+h+i} f_{X_i}(x) \\
f_{X_{T_2}}(x) &= s_{X_{T_3}, \varepsilon, X_j}(x) = s_{X_{T_3}, X_j}(x) = \\
&= \frac{c}{c+d+f+h+i} s_{X_c, X_j}(x) + \frac{d}{c+d+f+h+i} s_{X_{T_4}, X_j}(x) + \\
&+ \frac{f}{c+d+f+h+i} s_{X_{T_6}, X_j}(x) + \frac{h}{c+d+f+h+i} s_{X_h, X_j}(x) + \\
&+ \frac{i}{c+d+f+h+i} s_{X_i, X_j}(x)
\end{aligned}$$



Rysunek 3.15: Reprezentacja pętli w drzewie rozdrobnień



Rysunek 3.16: Fragment sieci odpowiadający pętli z rysunku 3.15

$$\begin{aligned}
 f_{X_T}(x) &= \frac{a}{a+c+d+f+h+i} f_{X_{T_1}}(x) + \frac{c+d+f+h+i}{a+c+d+f+h+i} f_{X_{T_2}}(x) = \\
 &= \frac{a}{a+c+d+f+h+i} s_{X_a, X_b}(x) + \frac{c}{a+c+d+f+h+i} s_{X_c, X_j}(x) + \\
 &\quad + \frac{d}{a+c+d+f+h+i} s_{X_d, X_e, X_j}(x) + \frac{f}{a+c+d+f+h+i} s_{X_f, X_g, X_j}(x) + \\
 &\quad + \frac{h}{a+c+d+f+h+i} s_{X_h, X_j}(x) + \frac{i}{a+c+d+f+h+i} s_{X_i, X_j}(x)
 \end{aligned}$$

gdzie  $X_a, X_c, X_d, X_f, X_h, X_i \sim \text{Exp}(a+c+d+f+h+i)$ ,  $X_b \sim \text{Exp}(b)$ ,  $X_e \sim \text{Exp}(e)$ ,  $X_g \sim \text{Exp}(g)$ ,  $X_j \sim \text{Exp}(j)$ .

Otrzymany wynik jest zgodny z naszymi oczekiwaniami. Intuicyjnie gęstość zmiennej  $X_T$  jest "sumą" wszystkich ścieżek prowadzących od  $P_1$  do  $P_2$  z odpowiednimi wagami.

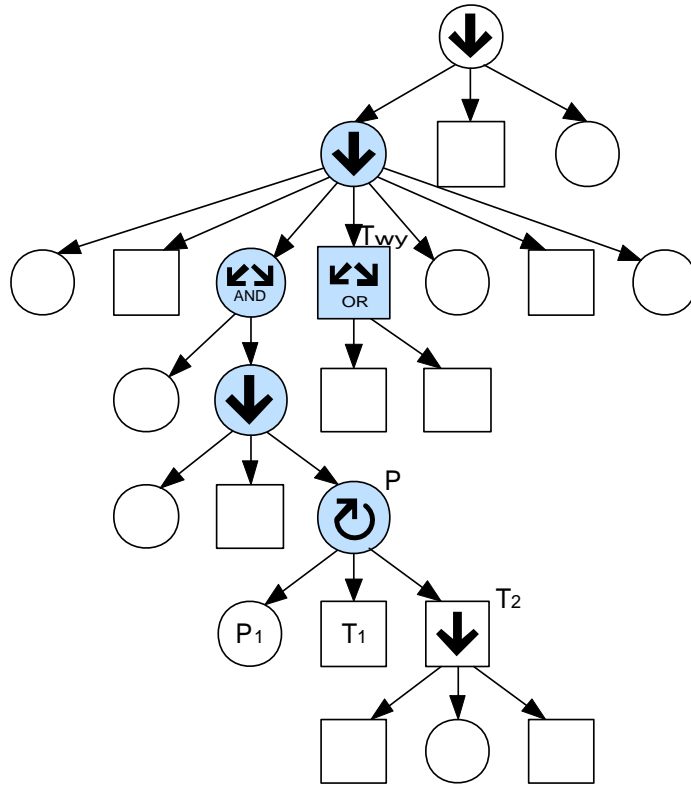
### 3.8. Pętla

Podrozdział ten poświęcony jest na wyprowadzenie reguły służącej do wyznaczania rozkładu zmiennej losowej związanej z miejscem, z którego utworzono pętlę. Fragment drzewa rozdrobnień dla tej reguły rozbicia przedstawiony jest na rysunku 3.15. Fragment ten odpowiada kawałkowi sieci przepływu pracy z rysunku 3.16.

Zdefiniujemy teraz pojęcia związane z pętlami, które ułatwią nam dalsze rozważania.

**Definicja 3.8.1** Częścią główną pętli będziemy nazywać fragment sieci odpowiadający poddrzewu drzewa rozdrobnień o korzeniu w miejscu  $P_1$ .

$i$ -tą odnogą pętli będziemy nazywać fragment sieci odpowiadający poddrzewu drzewa rozdrobnień o korzeniu w tranzycji  $T_i$ .



Rysunek 3.17: Przykładowa ścieżka od pętli  $P$  do tranzycji wyjściowej  $T_{wy}$

Przebiegiem pętli o długości  $k$  będziemy nazywać ciąg na przemian występujących części głównych i odnóg pętli, rozpoczynający i kończący się częścią główną oraz zawierający dokładnie  $k$  odnóg pętli.

**Definicja 3.8.2** Tranzycję zaczynającą odnogę nazwiemy tranzycją, która jako ojca w drzewie rozdrobnień ma pętlę.

Tranzycję wyjściową z pętli nazwiemy pierwszą tranzycją, do której daje się dojść od pętli idąc w górę drzewa rozdrobnień ścieżką złożoną z miejsc i schodząc w prawo do tranzycji w miejscu rozbitym sekwencyjnie.

**Przykład:** Na rysunku 3.17 tranzycje  $T_1$  i  $T_2$  to tranzycje zaczynające odnogi pętli  $P$ . Tranzycja  $T_{wy}$  jest tranzycją wyjściową z pętli  $P$ . Na rysunku tym jest również zaznaczona ścieżka od pętli do tranzycji wyjściowej.

Pojęcia tranzycji zaczynającej odnogę i tranzycji wyjściowej były zasygnalizowane w podrozdziale dotyczącym rozbicia wyboru tranzycji przy rozważaniach o rozkładzie czasu odpalenia tranzycji istotnych. Kontynuując te rozważania zauważmy, że gdy tranzycja istotna  $S$  należy do poddrzewa drzewa rozdrobnień o korzeniu w tranzycji wyboru głównego  $T$  i tranzycja  $T$  jest tranzycją wyjściową pętli  $P$  albo tranzycją zaczynającą odnogę pętli  $P$ , wówczas w momencie aktywowania tranzycji  $S$  aktywowane są również wszystkie tranzycje istotne w poddrzewach o korzeniach we wszystkich tranzycjach zaczynających odnogi pętli  $P$ , a także w tranzycji wyjściowej pętli  $P$ . Wobec tego dowolna z wyżej wspomnianych tranzycji istotnych odpali po czasie zgodnym z rozkładem wykładniczym o współczynniku równym sumie wag wszystkich tranzycji zaczynających odnogi pętli  $P$  oraz wagi tranzycji wyjściowej pętli  $P$ . Po tej obserwacji możemy sformułować następujący lemat.

**Lemat 3.8.3** *Zmienna losowa związana z tranzycją istotną należącą do poddrzewa o korzeniu w tranzycji głównego wyboru  $T$  ma rozkład z gęstością  $\text{Exp}(w(T))$  o ile tranzycja  $T$  nie jest tranzycją zaczynającą odnogę ani tranzycją wyjściową żadnej pętli drzewa rozdrobnień. Jeśli zaś tranzycja  $T$  jest tranzycją zaczynającą odnogę lub tranzycją wyjściową pętli  $P$ , to wówczas zmienna ta ma rozkład z gęstością  $\text{Exp}(\sum_{T \in \mathbb{T}(P)} w(T))$ , gdzie  $\mathbb{T}(P)$  oznacza zbiór tranzycji zaczynających odnogi i tranzycji wyjściowej pętli  $P$ .*

**Dowód:** Powyższy lemat wynika z dotychczasowych rozważań.  $\square$

Zajmiemy się teraz znalezieniem rozkładu czasu przejścia przez pętlę, tzn. czasu od chwili wyjścia z obszaru sieci wyprowadzonego z tranzycji  $T_{we}$  do chwili bezpośrednio poprzedzającej wejście do fragmentu sieci wyprowadzonego z tranzycji  $T_{wy}$  (bez czasu odpalenia pierwszej tranzycji z tego fragmentu). Nie wyprowadzimy jednak dokładnego wzoru na ten rozkład, lecz podamy sposób na dowolnie dobre (przynajmniej z teoretycznego punktu widzenia) przybliżenie go. Pomysł polega na zastąpieniu fragmentu sieci, odpowiadającego poddrzewu drzewa rozdrobnień o korzeniu w miejscu  $P$ , dla którego w pierwszym kroku zastosowano regułę pętli, szablonem przedstawionym na rysunku 3.18. Parametr szablonu  $d$  określa maksymalną liczbę iteracji pętli. Tranzycje  $R$ ,  $S$  i  $U$  są tranzycjami natychmiastowymi i wobec tego nie wydłużają sztucznie działania sieci. Ich znaczenie oraz to jakie wagi mają przypisane będziemy rozważać w dalszej części tego rozdziału.

Zastąpienie pętli przedstawionym na rysunku gadżetem odpowiada ograniczeniu liczby wykonań odnog pętli maksymalnie do  $d$ , gdzie  $d$  jest parametrem gadżetu. Oczywiście im wartość parametru  $d$  większa, tym wierniejsze będzie odwzorowanie działania oryginalnej sieci. Tranzycje  $R$  odpowiadają za wybór liczby wykonań ciała pętli - odpalenie tranzycji  $R_i$ , gdzie  $0 \leq i \leq d$  oznacza, że wykona się  $i$  iteracji pętli. Wobec tego wagi poszczególnych tranzycji  $R_i$  powinny być równe prawdopodobieństwu tego, że ciało pętli w oryginalnej sieci odpali  $i$  razy. Żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo musimy znać współczynniki wszystkich tranzycji będących w zbiorze tranzycji wyjściowych miejsca  $P_1$  (rysunek 3.15). Będą to tranzycje aktywne poddrzew drzewa rozdrobnień zaczepionych w tranzycji wyjściowej  $T_{wy}$  oraz tranzycjach zaczynających odnogi  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Oznaczmy przez  $p_s$  prawdopodobieństwo tego, że po przejściu sieci przez fragment wyprowadzony z miejsca  $P_1$  odpali któraś z tranzycji należących do pętli, a przez  $p_{wy}$  tego, że odpali któraś z tranzycji wyjściowych. Prawdopodobieństwa te są równe:

$$p_s = \frac{\sum_{i=1}^n w(T_i)}{w(T_{wy}) + \sum_{i=1}^n w(T_i)} \quad (3.8)$$

$$p_{wy} = \frac{w(T_{wy})}{w(T_{wy}) + \sum_{i=1}^n w(T_i)} \quad (3.9)$$

Znając prawdopodobieństwa  $p_s$  i  $p_{wy}$  możemy wyznaczyć współczynniki tranzycji  $R$ . Współczynnik tranzycji  $R_i$  (oznaczenie  $wsp_{R_i}$ ) będzie równy prawdopodobieństwu tego, że pętla wykona się  $i$  razy. Wobec tego:

$$wsp_{R_i} = \begin{cases} (p_s)^i p_{wy} & i < d \\ (p_s)^d & i = d \end{cases} \quad (3.10)$$

Zauważmy, że w przypadku  $i = d$  wyrażenie  $(p_s)^i$  przemnażamy przez 1 a nie przez  $p_{wy}$ . Dzieje się tak dlatego, że jeśli pętla wykonała się  $d$  razy to przy następnym wyborze na pewno nastąpi wyjście z pętli. Sprawdźmy jeszcze, że podane prawdopodobieństwa sumują się do 1.



$$\sum_{i=0}^d w_{spR_i} = \sum_{i=0}^{d-1} (p_s)^i p_{wy} + (p_s)^d = p_{wy} \left( \frac{1 - (p_s)^d}{1 - p_s} \right) + (p_s)^d = 1 - (p_s)^d + (p_s)^d = 1$$

Druga warstwa tranzycji w gadżecie zastępującym pętlę (tranzycje  $S$ ) jest odpowiedzialna za wybór jednego z przebiegów pętli. Prawdopodobieństwo tego, że wybrana zostanie odnoga  $i$  (w sytuacji gdy ma się wykonać kolejna iteracja pętli) będziemy oznaczać przez  $p_{T_i}$ . Prawdopodobieństwo to jest równe:

$$p_{T_i} = \frac{w(T_i)}{\sum_{k=1}^n w(T_k)} \quad (3.11)$$

Wyznamy teraz współczynniki tranzycji  $S$ . Zauważmy, że dla ustalonej liczby iteracji  $k$  możliwych przebiegów jest tyle ile  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru  $n$  elementowego (bo tyle jest odnóg pętli), a więc  $n^k$ . Każda z tranzycji  $S$  jest indeksowana dwiema liczbami — pierwsza z nich jest równa liczbie iteracji, druga zaś jest numerem przebiegu pętli o długości równej pierwszej z liczb. Niech  $\mathbb{W}_T^k$  oznacza zbiór wszystkich wariacji  $k$ -elementowych nad zbiorem tranzycji  $T$ ,  $\mathbb{W}_T^k(i)$  —  $i$ -tą wariację z tego zbioru, a  $\mathbb{W}_T^k(i)(j)$  —  $j$ -tą tranzycję  $i$ -tej wariacji. Wówczas współczynnik tranzycji  $S_{k,i}$  ( $w_{spS_{k,i}}$ ) będzie równy:

$$w_{spS_{k,i}} = \prod_{j=1}^k p_{\mathbb{W}_T^k(i)(j)}, \quad (3.12)$$

a więc prawdopodobieństwu tego, że wśród przebiegów długości  $k$  zostanie wybrany przebieg  $i$ -ty. Przyjmujemy, że iloczyn zerowej liczby czynników jest równy 1. Sprawdźmy jeszcze, że dla danej długości przebiegu współczynniki sumują się do 1. Dowód przeprowadzimy przez indukcję po długości przebiegu pętli. Dla przebiegu długości 1 teza jest prawdziwa. Zakładamy więc prawdziwość tezy dla  $k-1$  i sprawdzamy tezę dla  $k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^k} w_{spS_{k,i}} &= \sum_{i=1}^{n^k} \prod_{j=1}^k p_{\mathbb{W}_T^k(i)(j)} = \\ &= p_{T_1} \left( \sum_{l=1}^{n^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\mathbb{W}_T^{k-1}(l)(j)} \right) + \dots + p_{T_n} \left( \sum_{l=1}^{n^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\mathbb{W}_T^{k-1}(l)(j)} \right) = \\ &= \left( \sum_{l=1}^{n^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\mathbb{W}_T^{k-1}(l)(j)} \right) \left( \sum_{i=1}^n p_{T_i} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

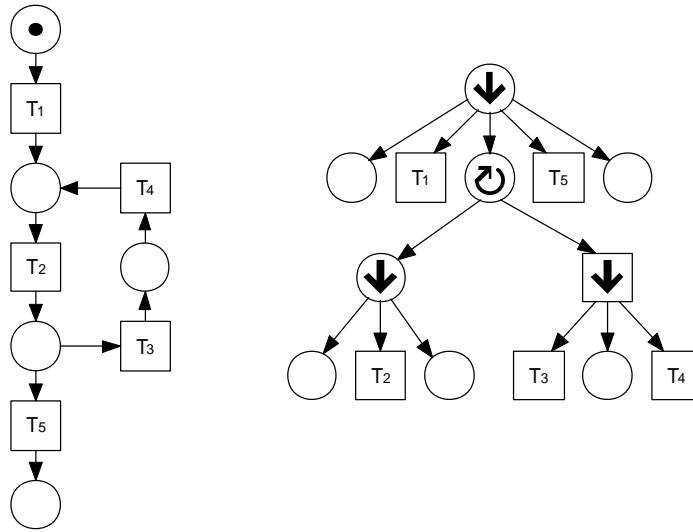
Przy trzeciej równości skorzystaliśmy z obserwacji, że wśród  $k$ -elementowych wariacji nad zbiorem tranzycji  $T$  dokładnie  $n$  zaczyna się od tranzycji  $T_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ , a ponadto po usunięciu pierwszej tranzycji  $T_i$  dostajemy wszystkie  $(k-1)$ -elementowe wariacje.

Tranzycja  $U$  łączy wszystkie ścieżki gadżetu i wprowadzona jest jedynie dla zwiększenia czytelności.

Wprowadzony gadżet pozwoli nam wyprowadzić przybliżony wzór na rozkład prawdopodobieństwa czasu przejścia przez pętlę.

**Lemat 3.8.4** *Dla oznaczeń z rysunku 3.15 zachodzi:*

$$X_P(d) \sim \sum_{k=0}^d \sum_{i=1}^{n^k} \prod_{j=1}^k p_s^k p_{wy}^{\delta_{k=d}} p_{\mathbb{W}_T^k(i)(j)} \text{SUMA} \left( X_{P_1}, X_{T_{\mathbb{W}_T^k(i)(j)}}, X_{P_1}, \dots, X_{T_{\mathbb{W}_T^k(i)(j)}}, X_{P_1} \right),$$



Rysunek 3.19: Przykładowa pętla oraz odpowiadające jej drzewo rozdrobnień

gdzie:

$$p_s = \frac{\sum_{i=1}^n w(T_i)}{w(T_{wy}) + \sum_{i=1}^n w(T_i)}$$

$$p_{wy} = \frac{w(T_{wy})}{w(T_{wy}) + \sum_{i=1}^n w(T_i)}$$

$$p_{T_i} = \frac{w(T_i)}{\sum_{k=1}^n w(T_k)}$$

**Dowód:** Lemat ten wynika z dotychczasowych rozważań dotyczących gadżetu zastępującego pętlę.  $\square$

### Hipoteza 3.8.5

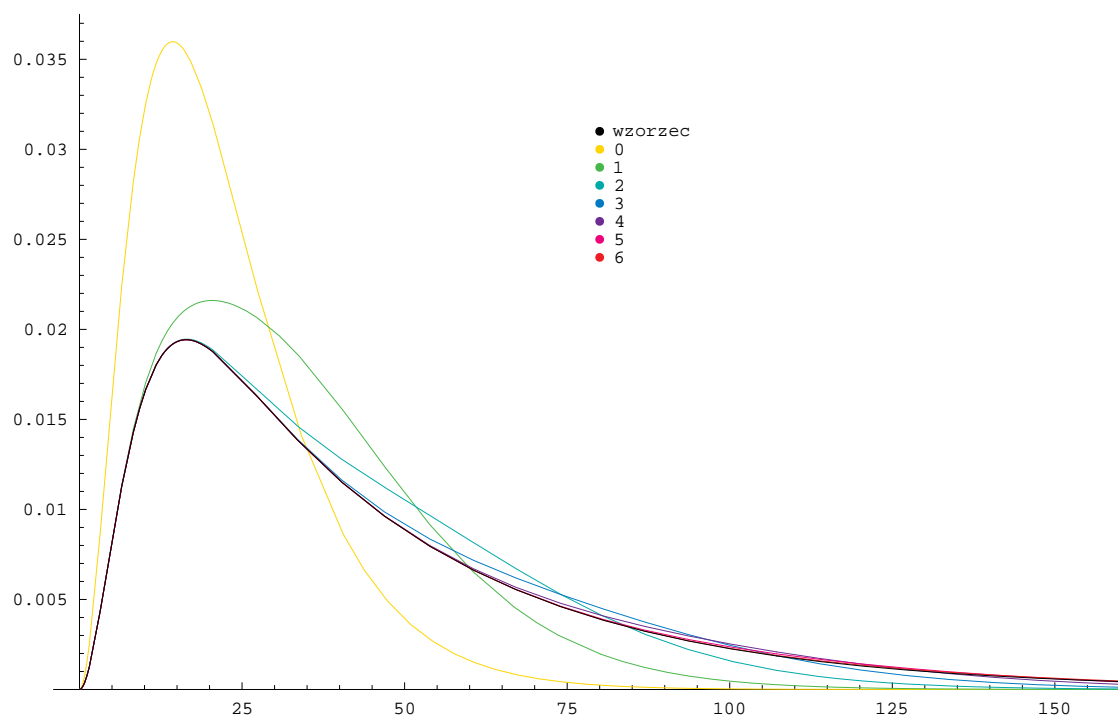
$$X_P(d) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} X_P$$

Intuicja związana z tą hipotezą jest następująca — dla dostatecznie dużych wartości parametru  $d$  szablonu zastępującego pętlę, uzyskiwane w ten sposób przybliżone rozkłady prawdopodobieństwa czasu przejścia przez pętlę dowolnie dobrze przybliżają rzeczywisty rozkład.

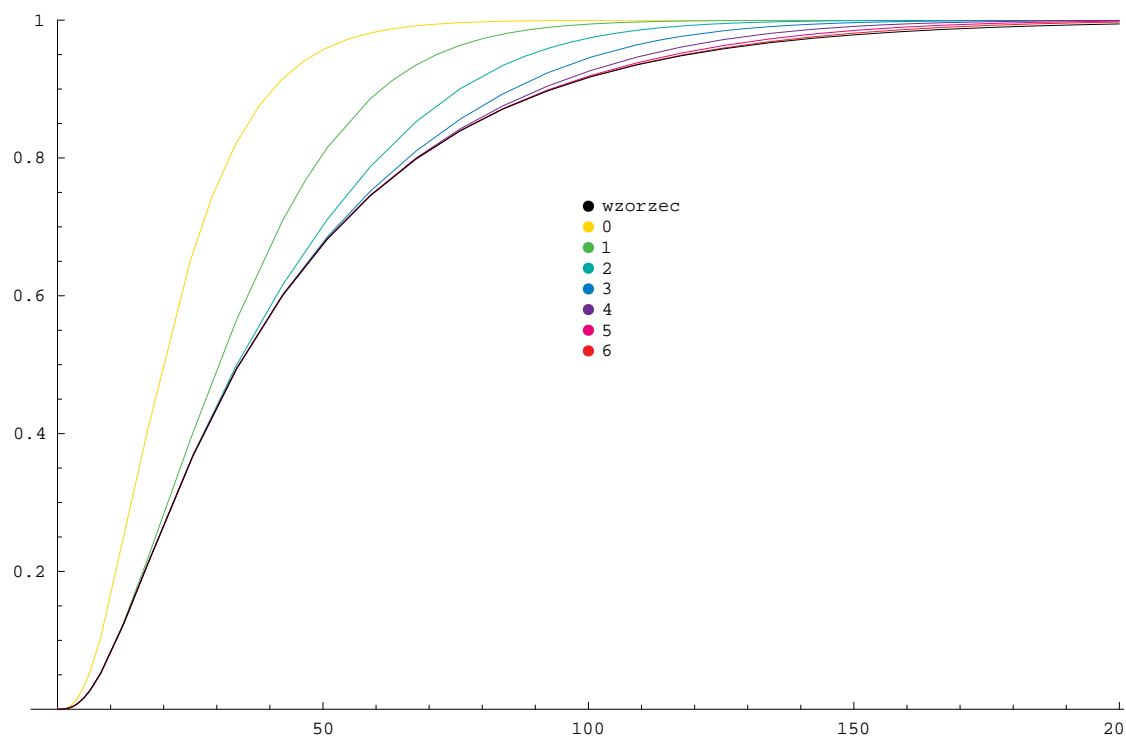
Na zakończenie tego podrozdziału przedstawię jeszcze wyniki uzyskane za pomocą programu *Mathematica* dla prostej pętli z rysunku 3.19. Testy polegały na wyznaczeniu dokładnej funkcji gęstości oraz dystrybuanty dla czasu przejścia przez sieć. Wykorzystany został w tym celu wzór 3.2. Następnie wyliczone zostały kolejne przybliżenia funkcji gęstości zgodnie z lematem 3.8.4. Na podstawie tak otrzymanych funkcji gęstości zostały wyznaczone również odpowiednie dystrybuanty. Testy zostały wykonane dla różnych wartości współczynników dla poszczególnych tranzycji. Wyniki dwóch z nich przedstawione zostały na załączonych rysunkach.

Na podstawie przeprowadzonych testów daje się poczynić kilka obserwacji. Przede wszystkim wyniki te potwierdzają intuicje związane z zastosowaniem zaproponowanego gadżetu. Widać wyraźnie, że podczas gdy właściwa dystrybuanta dąży asymptotycznie do 1, to dystrybuanty kolejnych przybliżeń osiągają wartość 1 w coraz dalszych punktach. Dzieje się tak

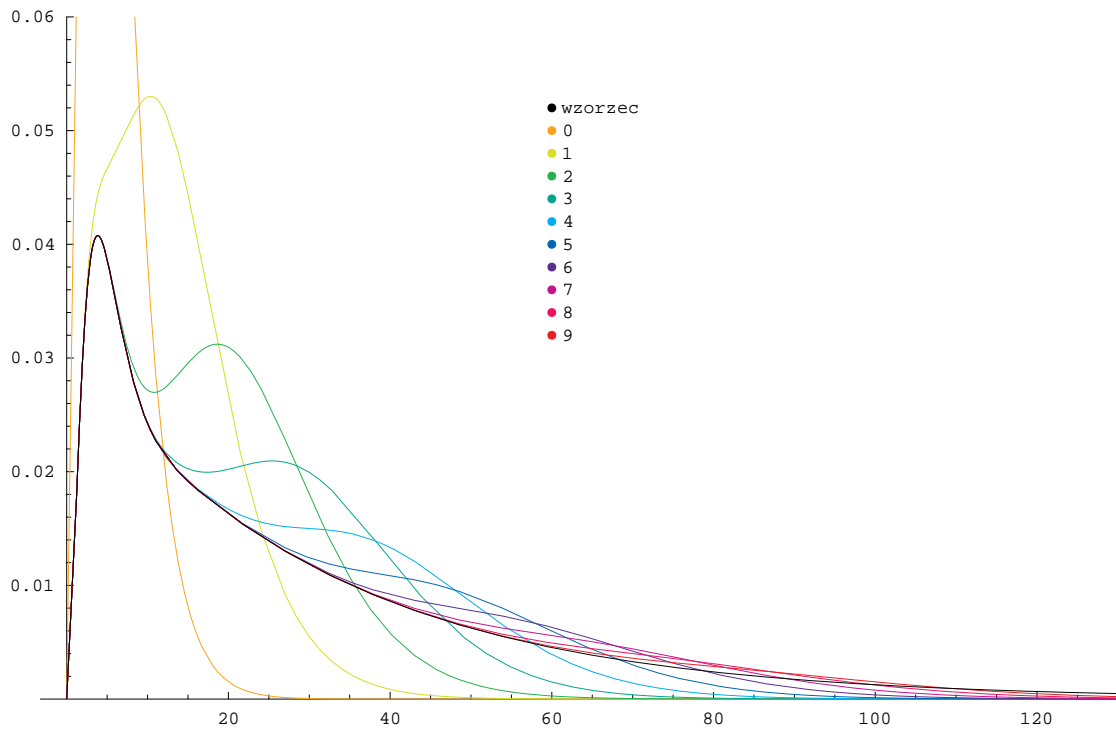




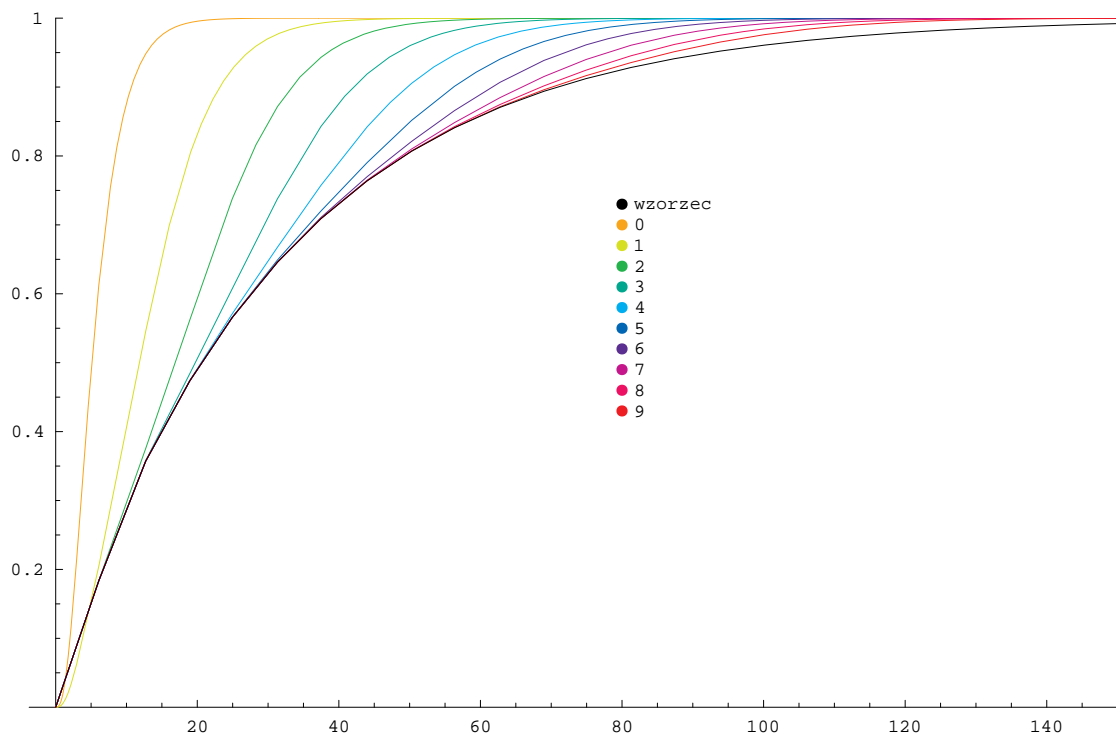
Rysunek 3.20: Wykresy gęstości dla sieci z tranzycjami  $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$



Rysunek 3.21: Wykresy dystrybuant dla sieci z tranzycjami  $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$



Rysunek 3.22: Wykresy gęstości dla sieci z tranzycjami  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$



Rysunek 3.23: Wykresy dystrybuant dla sieci z tranzycjami  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$

dlatego, że długość przebiegów w gadżecie jest ograniczona, natomiast oryginalna pętla może iterować dowolnie długo. Widać też, że ciąg kolejnych dystrybuant jest ciągiem malejącym. Wyjaśnienie ponownie jest proste — wraz z wydłużaniem możliwych przebiegów prawdopodobieństwo, tego że sieć będzie działała dłużej się zwiększa. Kolejna obserwacja dotyczy szybkości z jaką przybliżone wyniki zbiegają. W pierwszej z testowanych sytuacji prawdopodobieństwo pozostania w pętli jest równe  $\frac{1}{2}$ . Widać, że już piąte przybliżenie bardzo dokładnie odwzorowuje właściwy wynik. Dla drugiej z testowanych sieci prawdopodobieństwo pozostania w pętli wynosi  $\frac{5}{7}$ . W tym przypadku szybkość z jaką kolejne przybliżenia zbiegają jest wyraźnie mniejsza. Wynik ten też zgadza się z intuicjami — im większe prawdopodobieństwo pozostania w pętli, tym większa liczba przebiegów potrzebna do uzyskania dobrego przybliżenia. Przeprowadzone testy ujawniły również pewne słabości proponowanej metody — współczynniki składowych otrzymywanych funkcji gęstości bardzo szybko rosną lub bardzo szybko maleją. Jest to m.in. konsekwencja tego, że we wzorze z lematu 3.8.4 prawdopodobieństwo pozostania w pętli jest podnoszone do potęgi równej długości odpowiedniego przebiegu.

### 3.9. Podsumowanie

W rozdziale tym skupiliśmy się na wyprowadzeniu reguł pozwalających wyznaczać gęstość rozkładów zmiennych losowych związanych z węzłami drzewa rozdrobnień oznaczających czas przejścia przez poddrzewo w nich zaczepionych. Spróbujemy teraz podsumować co tak naprawdę udało się nam uzyskać.

Ze wszystkich przeprowadzonych rozważań wynika, że musimy przyjąć pewne założenia dotyczące drzewa rozdrobnień i związanej z nim sieci. Założenia te związane są z regułą rozbicia wyboru tranzycji oraz regułą pętli. Pierwsze ograniczenie dotyczy typu tranzycji. Będziemy zakładać, że dla każdej tranzycji głównego wyboru wszystkie tranzycje istotne są tego samego typu, tzn. natychmiastowe lub czasowe. Jak już wspominaliśmy nie jest to duże ograniczenie, gdyż w przypadku wystąpienia różnych typów, tylko tranzycje natychmiastowe miałyby znaczenie. Można oczywiście przeprowadzić odpowiednie rozważania, również dla tego przypadku, jednak taka komplikacja jest raczej niepotrzebna. Dodatkowo założymy, że wszystkie tranzycje w drzewie rozdrobnień mają policzone swoje wagi.

Liściom drzewa, a więc właściwym tranzycjom i miejscom sieci przypiszemy zmienne losowe zgodnie z następującymi regułami:

- wszystkim miejscom i tranzycjom natychmiastowym przypiszemy zmienną  $\varepsilon$ , a więc zmienną o rozkładzie punktowym skoncentrowanym w 0.
- wszystkim tranzycjom czasowym istotnym przypiszemy rozkład zgodnie z lematem 3.8.3
- pozostałym tranzycjom czasowym przypiszemy rozkład z gęstością  $Exp(\lambda)$ , gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem przypisanym tranzycji

**Twierdzenie 3.9.1** *W drzewie rozdrobnień bez pętli, opisanym tak jak powyżej, można wyznaczyć dokładną gęstość rozkładu czasu przejścia przez całą sieć.*

**Dowód:** Twierdzenie to łatwo wynika z lematów 3.4.1, 3.5.1, 3.6.1 i 3.7.7 (a właściwie wniosków do nich). Każdy z lematów wyznacza sposób liczenia rozkładu zmiennej losowej dla kolejnych reguł rozbicia: rozbicia sekwencyjnego miejsca i tranzycji, rozbicia równoległego miejsca oraz rozbicia wyboru tranzycji. Wyznaczenie gęstości rozkładu przejścia przez całą sieć sprowadza się do obliczenia gęstości zmiennej losowej związanej z korzeniem drzewa

rozdrobnień. To jednak można zrobić. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na wysokość drzewa o korzeniu w węźle, dla którego liczymy rozkład. Założenie indukcyjne jest spełnione, gdyż drzewa o wysokości 1 są liśćmi, a więc właściwymi miejscami lub tranzycjami sieci, dla których rozkład znamy. Założmy więc, że znamy rozkłady dla wszystkich korzeni drzew o wysokości co najwyżej  $n$ . Liczymy rozkład dla węzła będącego korzeniem drzewa o wysokości  $n + 1$ . Zauważmy, że wszyscy jego synowie są korzeniami drzew o wysokości co najwyżej  $n$ , a więc spełniają założenie indukcyjne. Na mocy założenia indukcyjnego znamy więc ich rozkład. Teraz już tylko wystarczy zauważyć, że węzeł którego rozkładu szukamy jest węzłem jednego z czterech typów: tranzycją rozbitą sekwencyjnie, tranzycją wyboru lub miejscem rozbitym sekwencyjnie lub równolegle. Wobec tego możemy zastosować odpowiednią regułę do wyznaczenia szukanego rozkładu.  $\square$

Jeśli hipoteza 3.8.5 jest prawdziwa to na mocy rozumowania analogicznego do rozumowania z powyższego dowodu prawdziwa jest również następująca hipoteza:

**Hipoteza 3.9.2** *W drzewie rozdrobnień z pętlami, opisanym tak jak powyżej, można z dowolną dokładnością wyznaczyć gęstość rozkładu czasu przejścia przez całą sieć.*

Zaletą zaproponowanej metody wyznaczania rozkładu czasu przejścia przez sieć przepływu pracy jest to, że opiera się ona jedynie na drzewie rozdrobnień sieci, a więc nie wymaga konstruowania grafu osiągalności sieci potrzebnego przy metodach opartych o procesy Markowa. Jak pisaliśmy wcześniej potencjalny rozmiar tego grafu jest jednym z podstawowych problemów przy badaniu sieci stochastycznych. Kolejną ważną zaletą jest fakt, że podczas obliczeń można operować na symbolach. Dzięki temu możliwe jest na przykład rozpatrywanie wyniku jako funkcji zależnej od współczynników konkretnych tranzycji i na tej podstawie optymalne ich dobieranie. Ponadto dla sieci bez pętli metoda ta pozwala na uzyskiwanie wyników pozbawionych błędów numerycznych.

Wśród wad tej metody należy wymienić jej zachowanie dla pętli. Nie została wypracowana metoda szacowania, jaka liczba iteracji pętli jest potrzebna dla uzyskania wyników będących dobrymi przybliżeniami. W odniesieniu do innych metod badania stochastycznych sieci Petriego wadą tej metody jest również to, że działa ona tylko dla klasy sieci możliwych do wyprowadzenia za pomocą metody rozdrobnień oraz to, że drzewo rozdrobnień badanej sieci musi być znane.

### 3.10. Co jest jeszcze do zrobienia?

Zaproponowana metoda działa dla sieci przepływów pracy otrzymywanych metodą rozdrobnień i pozwala wyznaczać rozkład czasu przejścia przez całą sieć. Jedno z rozszerzeń metody mogłoby polegać na badaniu rozkładu prawdopodobieństwa czasu przejścia przez konkretne fragmenty sieci, bądź też czasu przejścia między dwoma zadanymi markowaniami. Innym zagadnieniem jest sprawdzenie co się dzieje w przypadku, gdy na miejscu startowym umieszczony jest więcej niż jeden pionek. Kolejna kwestia dotyczy zbadania rozszerzeń nierozdrabniających — komunikacji i synchronizacji. Jeszcze innym tematem jest uwzględnienie miejsc zasobowych.

Rzeczą, która pozostaje do zrobienia jest rozstrzygnięcie czy zaproponowane w pracy hipotezy są prawdziwe. Ponadto bardzo cenne byłoby znalezienie metody na wyznaczenie liczby iteracji pętli potrzebnej do dobrego przybliżenia wyniku.

# Bibliografia

- [1] W. Aalst. The application of petri nets to workflow management. *The Journal of Circuits, Systems and Computers*, 8(1):21–66, 1998.
- [2] F. Bause and P. S. Kritzinger. *Stochastic Petri Nets - An Introduction to the Theory*. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2002.
- [3] A. Bobbio and K. S. Trivedi. An aggregation technique for the transient analysis of stiff markov chains. *IEEE Trans. on Computers*, C-35:803–814, 1986.
- [4] P. Buchholz and W. H. Sanders. Approximate computation of transient results for large markov chains. In *QEST*, pages 126–135. IEEE Computer Society, 2004.
- [5] A. Cheng, J. Esparza, and J. Palsberg. Complexity results for 1-safe nets. In *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, pages 326–337, 1993.
- [6] P. Chrzastowski-Wachtel, B. Benatallah, R. Hamadi, M. O’Dell, and A. Susanto. A top-down petri net-based approach for dynamic workflow modeling. In W. M. P. van der Aalst, A. H. M. ter Hofstede, and M. Weske, editors, *Business Process Management, International Conference, BPM 2003, Eindhoven, The Netherlands, June 26-27, 2003, Proceedings*, volume 2678 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 336–353. Springer, 2003.
- [7] G. Ciardo and A. S. Miner. A data structure for the efficient kronecker solution of GSPNs, 1999.
- [8] P. J. Courtois. *Decomposability: Queueing and computer system applications*. Academic, New York, 1977.
- [9] E. de Souza e Silva and H. R. Gail. Transient analysis for markov chains. *Computational probability*, pages 43–81, 2000.
- [10] D. D. Deavours and W. H. Sanders. An efficient disk-based tool for solving large markov models. *Perform. Eval*, 33(1):67–84, 1998.
- [11] P. J. Haas. *Stochastic Petri nets: modelling, stability, simulation*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [12] J. Jakubowski and R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. Script, Warszawa, 2001.
- [13] S. Karlin. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, 1966.
- [14] D. Kartson, G. Balbo, S. Donatelli, G. Franceschinis, and G. Conte. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1994.

- [15] R. A. Marie, A. L. Reibman, and K. S. Trivedi. Transient analysis of acyclic markov chains. *Performance Evaluation*, 7:175–194, 1987.
- [16] A. Reibmann and K. S. Trivedi. Numerical transient analysis of markov models. *Comp. Opns.Res.*, 15(1):19–36, 1988.
- [17] P. J. Schweitzer. A survey of aggregation-disaggregation in large Markov chains. In W. J. Stewart, editor, *Numerical Methods for Markov Chains*, pages 63–88. North Holland, Amsterdam, 1990.
- [18] Y. Takahashi. Weak D-markov chain and its application to a queueing network. In G. Iazeolla, P.-J. Courtois, and A. Hordijk, editors, *Computer Performance and Reliability*, pages 153–165. North-Holland, 1983.
- [19] K. v. H. W.M.P. van der Aalst and H. Reijers. Analysis of discrete-time stochastic petri nets. *Statistica Neerlandica*, 54(2):237–255, 2000.