Analiza - klasa 3a Zestaw 1. 5.9.2023

Algebra liniowa

Definicja. Liczbę $ad-bc$ nazywamy *wyznacznikiem* macierzy kwadrtowej $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, i zapisujemy $\det A$.

Stw. 1. Wektory $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ na płaszczyźnie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=0$.

Tw. 2. (Wzory Cramera) Układ 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \tag{1}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\neq 0$. Wówczas

$$x=\frac{\det\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{ed-bf}{ad-bc},\qquad y=\frac{\det\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{af-ce}{ad-bc}.$$

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3],\qquad \vec{a}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Stw. 3. (Własności wyznacznika) Niech $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a},\vec{b}$ to wektory w przestrzeni, t_1,t_2,t_3 to liczby. Wówczas

(i) $\det[t_1\vec{a}_1,t_2\vec{a}_2,t_3\vec{a}_3]=t_1t_2t_3\cdot\det[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3]$,

(ii) $\det[\vec{a}_1+\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3]=\det[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3]+\det[\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3]$ (i analogicznie dla pozostałych kolumn macierzy)

(iii) $\det[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{0}]=\det[\vec{a}_1,\vec{0},\vec{a}_3]=\det[\vec{0},\vec{a}_2,\vec{a}_3]=0$,

(iv) $\det[\vec{a},\vec{a},\vec{b}]=\det[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]=\det[\vec{b},\vec{a},\vec{a}]=0$.

Stw. 4. Wektory $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ w przestrzeni są współpłaszczyznowe wtw. gdy $\det[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3]=0$.

Tw. 5. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases},\qquad \vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A\neq 0$ i wówczas

$$x=\frac{\det[\vec{b},\vec{a}_2,\vec{a}_3]}{\det A},\quad y=\frac{\det[\vec{a}_1,\vec{b},\vec{a}_3]}{\det A},\quad z=\frac{\det[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{b}]}{\det A}.$$

---

1. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów a i b:

(a) $\begin{cases} x-y=a \\ bx-2y=12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax+2y=b+4 \\ 2x+(a+3)y=10 \end{cases}$

2. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x+3y-21=0$, $x+2y-4=0$, $3x+y-7=0$.
(a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
(b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
(c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta i wyznacz środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

3. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y:

(a) $\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+4y+z=1 \\ 5x+3y+2z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+z=3 \\ 3x+y+2z=2 \end{cases}$

4. Znajdź taki trójmian kwadratowy f, że $f(1)=8$, $f(-1)=2$, $f(2)=14$.

5. Wyznacz w zależności od $a\in\mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania układu równań

(a) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+ay-3z=1 \\ x+10y-z=a \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

6. Korzystając z twierdzeń na tej kartce udowodnij, że na każdym czworościanie można opisać sferę.

Wielomiany I

Niech $\mathbb{K}$ oznacza zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. W każdym twierdzeniu lub zadaniu $\mathbb{K}$ zawsze oznacza ten sam zbiór.

Definicja. *Wielomianem stopnia* k o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (lub $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$)

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w. Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym*. Stopień *wielomianu zerowego* $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *miejscem zerowym* lub *zerem* wielomianu w.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania funkcji.

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$|a_k x^k| > |w(x) - a_k x^k|, \qquad \text{gdy } |x| > M.$$

Tw. (Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów). Załóżmy, że wielomiany

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \quad \text{i} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$.

---

1. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

2. Udowodnij, że dla każdego wielomianu $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ istnieje wielomian $g \in \mathbb{K}[x]$ taki, że $f(x) = g(x+1) - g(x)$ dla każdego x.

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznacz pierwiastki zespolone wielomianu

$$p(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3.$$

Jak za pomocą uzyskanych wzorów można otrzymać pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia 3?

4. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że

(i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f+g) = \deg f$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

(iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

5. Wyznacz wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $p(x^2) = p(x)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

6. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ jest

(i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k;

(ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k.

7. (a) Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry
(b) Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

8. Udowodnij, że funkcje (a) $\dfrac{x}{1+x^2}$, (b) $\sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ nie są wielomianami.

9. Udowodnij, że wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (gdzie $a \neq 0$) przyjmuje dla każdej liczby całkowitej x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ oraz d są całkowite.

10. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.

11. Wielomian P stopnia $n > 1$ ma współczynniki całkowite, $x, y \in \mathbb{Z}$ i $P(x) \neq P(y)$. Udowodnij, że $|P(x) - P(y)| \geqslant |x - y|$.

12. Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ liczba $f(a+\sqrt{b}) + f(a-\sqrt{b})$ jest całkowita.

13. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian

$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Wielomiany II

Tw. 1. (o dzieleniu wielomianów) Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $h(x)$, gdzie $\deg h \geqslant 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q(x)$ i $r(x)$ taka, że

$$f = h \cdot q + r, \quad \text{i} \quad \deg r < \deg h.$$

Mówimy wówczas, że r jest *resztą z dzielenia* wielomianu f przez wielomian h. Jeżeli $r = 0$ (czyli $f = h \cdot q$), to mówimy, że h jest *dzielnikiem* f lub f jest *podzielny* przez h.

Tw. 2. (Bézouta) Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - c$ jest równa $f(c)$, czyli $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$ dla pewnego wielomianu q takiego, że $\deg q = \deg f - 1$.

Wniosek. Jeżeli różne liczby $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są pierwiastkami wielomianu f, to f jest podzielny przez wielomian $(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_k)$.

Definicja. Mówimy, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu f krotności k, jeżeli $f(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - c)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - c)^{k+1}$.

Schemat Hornera. Dany jest wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) i liczba c. Współczynniki wielomianu $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ takiego, że $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$ i liczbę $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Algorytm dzielenia wielomianów z resztą: Dla danych wielomianów w i q, gdzie $\deg w \geqslant \deg q$, szukamy wielomianów v i r takich, że $w = p \cdot v + r$ i $\deg(r) < \deg(q)$:

Niech $w_0(x) = w(x)$, $v_0(x) = 0$.

Jeżeli mamy już wyznaczone wielomiany w_k i v_k, to v_{k+1} otrzymujemy dodając do v_k iloraz najwyższych stopniem wyrazów wielomianów w_k i p: $v_{k+1}(x) = v_k(x) + c_k x^{j_k}$. Następnie wyznaczamy $w_{k+1}(x) = w_k(x) - c_k x^{j_k} \cdot p(x)$. Wówczas $\deg(w_{k+1}) - \deg(w_k)$.

Powtarzamy tak długo, aż $\deg(w_k) < \deg(q)$. Wtedy $v = v_k$ i $r = w_k$.

Tw. 3. (O interpolacji wielomianowej) Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$.

Wniosek. (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n + 1$ różnych argumentów, to $p = q$.

---

1. Nie wykonując dzielenia wielomianów, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu (a) $x^4 + x^2 - 6$ przez $x^2 - 2x - 3$, (b) $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ przez $x^2 + 1$.

2. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez (a) $x + 1$, (b) $x^2 - 3x + 2$?

3. Wielomian f daje resztę -1 przy dzieleniu przez $x - 1$, resztę 2 przy dzieleniu przez $x - 2$ i resztę 11 przy dzieleniu przez $x - 3$. Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

4. Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu

(a) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,

(b) $g(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,

(c) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$.

5. Stosując schemat Hornera zapisz wielomiany (a) $x^5 + x^3 + x$, (b) $x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.

6. Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:

(a) $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,

(b) $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$

(c) $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$

(d) x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

7. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$?

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$.

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian $x^2 + x + 1$ dzieli wielomian (a) $(x - 1)^n - x^n - 1$, (b) $(x + 1)^n + x^n + 1$?

10. Niech $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $f(x^n)$ przez wielomian $f(x)$.

11. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w. Pokaż, że wielomian $v(x) = w(x^n)$ jest podzielny przez wielomian $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

12. Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.

13. Niech p będzie wielomianem stopnia n takim, że $p(k) = \dfrac{k}{k+1}$ dla k $= 0, 1, 2, \ldots, n$. Oblicz $p(n + 1)$.

14. Wykaż, że liczby 1 i -1 to jedyne rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$

15. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + (2n + 1)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Analiza - klasa 3a Zestaw 4. 17.10.2023

Wielomiany III

Mówimy, że liczba x_0 jest *k-krotnym pierwiastkiem* wielomianu $P(x)$ stopnia n, jeżeli istnieje wielomian $Q(x)$ stopnia $n-k$ taki, że $P(x) = (x-x_0)^k Q(x)$ i $Q(x_0) \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zesolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \qquad \ldots,$$

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \qquad \ldots, \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są różne.

---

1. Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Oblicz sumę, sumę kwadratów i iloczyn pierwiastków wielomianu $x^n - (x-1)^n$.

3. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (b) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$

4. Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + 7$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.

5. Wielomian $p(x) = x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ ma pięć pierwiastków dodatnich. Wyznacz współczynniki a, b, c.

6. Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ i $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.

8. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki

$$x + y + z = u + v + w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w, \quad u \leqslant v \leqslant w.$$

Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.

9. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki $xyz > 1$ i $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Udowodnij, że dokładniej jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.

10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0$ są liczbami rzeczywistymi.

12. Wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ współczynniki całkowite i trzy pierwiastki rzeczywiste. Liczba ad jest nieparzysta, a liczba bc jest parzysta. Udowodnij, że pewien pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.

13. Wszystkie współczynniki wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ są liczbami nieujemnymi i wielomian P ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $P(2) \geqslant 3^n$.

14. Liczby zespolone $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to pierwiastki wielomianu $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_n} = \frac{n}{2}.$$

15. Udowodnij, że suma pewnych dwóch pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 - 12x - 5$ wynosi 2.

Wielomiany IV

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \qquad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

---

1. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.

2. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k+1$, $w(k+1) = k+2$, $w(k+2) = k$.

3. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?

4. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,
(b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$,
(c) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$,
(d) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,
(e) $18x^6 + 27x^5 - 5x^4 - 18x^2 - 27x + 5$,
(f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$,
(g) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

5. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne.

6. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków całkowitych.

7. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

8. Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ma współczynniki całkowite. Załóżmy, że liczby a_n, a_0 i $f(1)$ są nieparzyste. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków wymiernych.

9. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu f o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że pewien współczynnik wielomianu f jest mniejszy od -1.

10. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p+1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.

11. Dane są różne liczby całkowite a i b. Pokaż, że wielomian $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

12. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$$

nie jest rozkładalny w nad $\mathbb{Z}$.

13. Rozłóż wielomiany na czynniki w $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $(x+1)^3 + (x-1)^3$,
(b) $x^6 + 1$,
(c) $x^9 + x^4 - x - 1$,
(d) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5x + 15$,
(e) $x^4 + 4$,
(f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$,
(g) $8x^3 - 5x^2 - 24x + 15$,
(h) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 2$
(i) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$,
(j) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$,
(k) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$,
(l) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$
(m) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$
(n) $x^8 + x^4 + 1$,
(o) $x^{10} + x^5 - 2$,
(p) $x^{10} + x^5 + 1$,
(q) $(x^2+x+1)^2 + 3x(x^2+x+1) + 2x^2$,
(r) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$
(s) $x^9 - 6x^4 + x^3 + 8$

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem czterech różnych liczb naturalnych.

15. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

16. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.

Analiza - klasa 3a Zestaw 6. 22.11.2023

Powtórzenie

1. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} a^2x - 9y = 0 \\ (a+2)x + 2z = 10 \\ 5y + (a-1)z = -15 \end{cases}$$

(a) nie ma rozwiązań,
(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) ma wiele rozwiązań.

2. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.

3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2022} - 2021x^{1011} + x^2 - 5x + 2021$ przez $x^2 - 1$.

4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia n taki, że $w(2) = 7$ i $w(5) = 13$.

5. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + 5$ jest podzielny przez (a) $(x+1)^2$, (b) $x^2 + 4$?

6. Zapisz wielomian $4x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 5$ jako wielomian zmiennej $t = x + 1$.

7. Dla jakich a, b wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu?

8. Wyznacz wszystkie zespolone pierwiastki wielomianów:

(a) $3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$,
(b) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3$,
(c) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$,
(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1$.

9. Wyznacz rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

10. Niech $n \geqslant 2$. Udowodnij, że wielomian

$$p(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

11. Dla jakich wartości współczynnika $a \in \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 + ax^2 - 3x - 19$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$?

12. Wielomian $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, ma współczynniki całkowite i $7 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 7.

13. Udowodnij, że wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid ad$ i $2 \mid bc$, nie może mieć trzech pierwiastków wymiernych.

14. Rozłóż wielomiany na czynniki o całkowitych współczynnikach:

(a) $x^6 + x^4 + 2x^2 + 2$,
(b) $x^6 - 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 1$,
(c) $x^{16} - x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$,
(d) $x^8 + x^4 + 2x^2 + 6$,
(e) $x^9 + x^7 - x^5 - x^3 + 2x^2 + 2$.

15. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^7 + (x+3)^7 + (x+4)^7 + 6$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $x^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

17. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Analiza - klasa 3a Zestaw 7. 5.12.2023

Zadania różne

---

1. Rozwiąż układy równań:

(a) $\begin{cases} x-y=6 \\ x^3-y^3=126 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (x-y)(y-1)=6 \\ (x+2)(y+2)=24 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 7x^3+11xy^2=6 \\ x^3+x^2y+y^3=1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (x^2+x+1)(y^2+y+1)=3 \\ (1-x)(1-y)=6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}-6\dfrac{x-2y}{xy}=1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{(x+y)^2}{2} \end{cases}$

(l) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=3 \\ \dfrac{y+z}{xyz}=4 \\ \dfrac{z+x}{xyz}=5 \end{cases}$

2. Uprość wyrażenia

(a) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$, dla $a,b>0$, $a\neq b$.

(b) $\dfrac{(a^2-b^2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$, dla $|a|\neq|b|$.

(c) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{b^5}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}\sqrt[2]{b}}\right)\right)^3}$, dla $a,b>0$.

(d) $\sqrt[3]{(a^2+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}}+\sqrt[3]{(a^2-1)\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}}$, dla $a>1$.

(e) $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)\cdot\dfrac{b^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2}}$.

3. Rozwiąż równania

(a) $\sqrt{1-|5-x^2|}=2$

(b) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

(c) $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=4$

(d) $\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{|x^2-1|}$

(e) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$,

(f) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$

(g) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+8}=\sqrt{2x+6}$

(h) $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=\sqrt[4]{8(x-4)(6-x)}$

(i) $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$

(j) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12$

(k) $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}}=x+2$

(l) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

4. Rozwiąż nierówności

(a) $\dfrac{1}{x+2}\leqslant\dfrac{3}{x-3}$,

(b) $\dfrac{1+x^3}{x^2-4}<x$,

(c) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$,

(d) $\left|\dfrac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right|<1$,

(e) $\dfrac{3}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$,

(f) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\geqslant 4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$,

(g) $(x-2)\sqrt{x^2+6}\leqslant x^2-4$,

(h) $\sqrt{2x+1}<\sqrt{x^3-4x^2+x+5}$,

(i) $\dfrac{x^2-16}{\sqrt{35-2x-x^2}}\leqslant|x|+4$,

5. Udowodnij, że

(a) $\left(x^4+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)<\left(x^4+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$, dla $x>1$;

(b) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^2\geqslant 6\left(\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$, dla $x>0$.

6. Niech $a\in\mathbb{R}$. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}}=x.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m>1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{\sqrt[n^2]{mn+1}}+\frac{1}{\sqrt[m^2]{mn+1}}>1.$$

Analiza - klasa 3a   Zestaw 8.   2.1.2024

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \to g$.

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do* g. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *ciągiem rozbieżnym.*

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to
(i) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,   (ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Stw. 3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Tw. 4. (o trzech ciągach) Dane są trzy ciagi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Stw. 5. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas
(i) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,
(ii) jeśli $b \neq 0$, to $b_n \neq 0$ dla dostatecznie dużych n i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Stw. 6. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdego n, lub $2 \nmid k$ to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

---

1. Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$, (b) jeśli $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.
2. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$. Następnie udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
4. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$.
5. Załóżmy, że $a_n \to a$. Wykaż, że $|a_n| \to |a|$. Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.
6. Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:

   (a) $a_n = n$,
   (b) $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
   (c) $c_n = \frac{q^n}{n^k}$, gdzie $|q| > 1$, $k \in \mathbb{N}$,
   (d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
   (e) $b_n = \frac{n^n}{n!}$.

7. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n > a$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > a$ dla $n > N$.
8. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > b_n$ dla $n > N$.
9. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n > N$. Wykaż, że
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
10. Załóżmy, że $a_n \to g$. Wykaż, że ciąg $b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n}$ też jest zbieżny do g.
11. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny do 0. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
13. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{2n+8}$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)^2}{3n^2+7n-6}$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+1} - 2\cdot 2^{2n}}{5\cdot 3^n - 4^{n+2}}$,
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n - 7\cdot 3^n}{3^n + 2}$,
   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n}$,
   (f) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$,
   (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$,
   (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n+k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$,
   (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!}$,
   (j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,
   (k) $\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1})$,
   (l) $\frac{n}{n^2+1}\sin(n!)$.
   (m) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$,
   (n) $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$,
   (o) $\sqrt[n]{n + 3^n}$,
   (p) $\sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,
   (q) $\sqrt[n^2]{n}$,
   (r) $\sqrt[n+2]{n-2}$, $n \geqslant 2$,
   (s) $\sqrt[n^2]{5^n - 4}$,
   (t) $\sqrt[n]{5^{n-1} - 7\cdot 2^{2n} - 100}$

Analiza - klasa 3a   Zestaw 9.   30.1.2024

Granica ciągu II

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do* $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \ a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \to +\infty$. Wówczas

- $\frac{1}{a_n} \to 0$,
- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny lub ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$ i $a_n b_n \to +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \geqslant a_n$ dla prawie wszystkich n, to $b_n \to +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\frac{1}{n} \cdot n$, $\frac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\frac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\frac{0}{0}$, np. $\frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\frac{\infty}{\infty}$, np. $\frac{n}{n+1}$, $\frac{2^n}{n}$, $\frac{n}{2^n}$,
- 1^∞, np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0, np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

---

1. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

2. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że w ciągu (b_n) wystepuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) sa całkowite.

3. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że nie istnieją:

(a) $\frac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$,

(b) $\frac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$,

(c) $\frac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$,

(d) $\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(e) $n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2}\right)$,

(f) $\sqrt{n^4 - 3n} \left(\sqrt[3]{1 - n^3} + n\right)$,

(g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(h) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

4. (a) Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Załóżmy, że $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\frac{2^n}{n!}$, (b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. Liczby całkowite a_n, b_n spełniają zależność $a_n + b_n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

7. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

8. (a) Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = g.$$

(b) Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = g.$$

9. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^\infty$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

10. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\sqrt[n]{2 \cdot 5^n - 3^n + n^3 \sin n}$, (b) $\sqrt[n]{n!}$.

11. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n}{n}.$$

12. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = +\infty.$$

Analiza - klasa 3a   Zestaw 10.   27.2.2024

Kresy zbiorów

Definicje. Niech $A \subset \mathbb{R}$.

- Zbiór A jest *ograniczony z góry* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant b$. Każdą taką liczbę b nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A.
- Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

  (i) b jest ograniczeniem górnym zbioru A;
  (ii) jeżeli c jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $b \leqslant c$.

  Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$.

Analogicznie definujemy zbiór *ograniczony z dołu*, *ograniczenie dolne* i *kres dolny* (*infimum*) zbioru A, oznaczany $\inf A$.

Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$. Ponadto przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$ i $\sup \emptyset = -\infty$.

Jeżeli $a = \sup A$ i $a \in A$, to mówimy, że a jest *elementem maksymalnym* zbioru A i stosujemy oznaczenie $a = \max A$. Podobnie definiujemy *element minimalny* $\min A$.

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A
$\iff$ b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ b-\varepsilon < a$
$\iff$ b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz istnieje ciąg $a_n \in A$ zbieżny do b.

(ii) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru A
$\iff$ b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ a < b+\varepsilon$
$\iff$ b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz istnieje ciąg $a_n \in A$ zbieżny do b.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.

Stw. 2. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny.

Definicja. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest to najmniejszy podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ o własnościach (i) $1 \in A$ oraz (ii) jeśli $a \in A$ to $a+1 \in A$.

Stw. 3. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Stw. 4. (Zasada Archimedesa). Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturnalna n taka, że $n > a$.

Tw. 5. (istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych). Jeżeli $a \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \geqslant 0$ taka, że $b^n = a$.

Tw. 5. (o gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, $a < b$, istnieje liczba $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < x < b$.

Definicja. Jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste, $\lambda \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy, że $\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$, $-A = (-1)\cdot A$, $A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ zachodzi $a \leqslant b$. Udowodnij, że $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

2. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $b = \inf A$, $c = \sup A$. Wyznacz kresy zbioru $\lambda \cdot A$.

3. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i mają skończone kresy. Udowodnij równości:

(i) $\sup(-A) = -\inf A$,
(ii) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
(iii) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
(iv) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$,
(v) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, jeśli $A, B \subset [0, +\infty)$.

4. Znajdź kresy zbiorów. Czy zbiory mają elementy maksymalne i minimalne?

(a) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) $\left\{\frac{n^2+2n-3}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(c) $\left\{x - \frac{1}{x} : 1 \leqslant x \leqslant 2024\right\}$;

(d) $\left\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$;

(e) $\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| : m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m\right\}$;

(f) $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$;

(g) $\left\{\frac{nm}{2n^2+m^2} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(h) $\{xyz : x+y+z = 6 \text{ i } 0 \leqslant x, y, z\}$

(i) $\{(1-4a)b^3 + a^2 : a, b \in (0,1)\}$

(j) $\left\{\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(k) $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Dany jest zbiór $E = \{1 + n^{-2} : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz kresy zbioru $E + 2\cdot E$.

6. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ ma własność, że dla każdego $A \in A$ istnieje eement $b \in A$ taki, że $b \leqslant \frac{a}{2} + 1$. Udowodnij, że $\inf A \leqslant 2$.

7. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Udowodnij, że istnieje liczba wymierna q taka, że $a < qx < b$.

8. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału $(0,1)$. Wyznacz zbiór $A + A$.

9. Udowodnij, że istnieją ciągi liczb wymiernych $(a_n), (b_n)$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3}\right) = \sqrt{5}.$$

10. Wyznacz kres górny zbioru $\left\{\frac{x(1+\sqrt{y})}{x^2+y^2} : 0 < x \leqslant y < 1\right\}$.

11. Wyznacz kresy zbioru

$$\left\{\frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3} + \ldots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{a_n} + \frac{na_n}{a_1} : a_1, a_2, \ldots, a_n > 0\right\}.$$

Analiza - klasa 3a Zestaw 11. 19.3.2024

Granica ciągu III

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest
(i) niemalejący i ograniczony z góry
lub
(ii) nierosnący i ograniczony z dołu.
Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Lemat 1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Lemat 2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera.*

Tw. 3. $e = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\theta_n \in (0,1)$ taka, że $e = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{nn!}$.

Tw. 4. Liczba e jest niewymierna.

---

1. Wykaż zbieżność ciągów

$$\text{(a) } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \text{(b) } b_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \text{(c) } c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right), \quad .$$

2. Niech $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

4. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{a_n^{-1} + b_n^{-1}}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

5. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne do tej samej granicy (zwanej *srednią arytmetyczno – geometryczną* liczb a_1, b_1).

6. Ciąg $(a_n)_n$ spełnia warunki $0 < a_n < 1$ i $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

7. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1} + a_n^3}{3}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Niech $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ i $b_{n+2} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

9. Wykaż, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

10. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

11. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{a}-1)^n = a^2$ dla $a \geqslant 1$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2} = 1$.

12. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

13. Pokaż,że jeśli $a_n \in \mathbb{Q}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

14. Niech $(\theta_n)_n$ to ciąg zdefiniowany w lemacie 3. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = 1$.

15. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

16. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Analiza - klasa 3a   Zestaw 12.   23.4.2024

Granica ciągu IV

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{m,n>N} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki:
(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n,
(ii) istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$,
(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Wówczas $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

---

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:
(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$, (c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, (d) $d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.

2. Zbadaj zbieżność ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanego następująco:

$$x_1 = 3, \qquad x_{n+1} = \left(\frac{x_n - 1}{2}\right)^2 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. Kryterium Leibniza zbieżności szeregów. Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ jest zbieżny.

4. Niech $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Wykaż, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$
(a) jest rozbieżny,
(b) jest zbieżny do danej liczby rzeczywistej g.

5. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0,1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n|$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

6. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{i} \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n,m>N} |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

7. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

8. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

9. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leqslant 2023$. Wykaż, że ciąg $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ jest zbieżny.

10. Oblicz granice
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

11. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right)$,
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(p+k)!}{k!}$.

12. Wykaż, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

13. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n} + x_{2n+1}) = 2022, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_{2n-1} + x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}\right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

14. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$

Analiza - klasa 3a Zestaw 13. 14.5.2024

Granica ciągu – powtórzenie.

1. Oblicz granice ciągów

(a) $\dfrac{3n^4-10n^3-2n^2+7}{9n^4-5n^2+19n}$

(b) $\dfrac{5^{n+1}\cdot n^2-3^{n+2}\cdot n^3}{3n\cdot 5^{n+2}+2^{n+3}\cdot n^6}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{n}-3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1}-2\sqrt[3]{n}}$,

(d) $n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$,

(e) $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}-\sqrt[3]{n^3+1}$,

(f) $\sqrt[n]{7^n-3\cdot 5^n-12}$,

(g) $\dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(h) $\dbinom{2n}{n}^{-1}$

(i) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

(j) $\left(\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(k) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n}$,

(l) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$,

(m) $\sqrt[n]{\dbinom{3n}{n}}$,

(n) $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

(o) $\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n^2+1}}$,

(p) $\dfrac{1}{n!}\dbinom{2n}{n}$,

(q) $\dfrac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}$

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0=3$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0=2$, $b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0=5$, $c_{n+1}=\dfrac{(c_n-2)^2}{5}$.

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

4. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=+\infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=+\infty.$$

5. Ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)=1.$$

Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

6. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{k+1}}$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)^3$

(g) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{3^k}\right)$,

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^k}{2^k}\right)$.

7. Wyznacz kresy zbiorów

(a) $\left\{\dfrac{\sqrt{m+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$,

(b) $\left\{\dfrac{nm}{2n^2+3m^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$,

(c) $\left\{\min\left(x,\dfrac{1}{y},y+\dfrac{1}{x}\right) : x,y>0\right\}$,

(d) $\left\{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1-y}{1+y}+\dfrac{1-z}{1+z} : x,y,z>0 \text{ i } x+y+z=1\right\}$,

(e) $\left\{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor : n\in\mathbb{N}\right\}$.

8. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$.

9. Wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)_n$ są dodatnie i ciąg $(b_n)_n$ zadany wzorem

$$b_n=a_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$$

jest zbieżny. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Funkcja wykładnicza – wprowadzenie

Przypomnienie: Jeśli $a > 0$ i $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, to

$$a^x = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad \text{oraz} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 0. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \to 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n = 1$.

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

(i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geqslant 1$ dla $x \geqslant 0$ i $\exp(x) \leqslant 1$ dla $x \leqslant 0$;

(ii) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;

(iv) $\exp x \geqslant 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$;

(v) funkcja exp jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \to +\infty$ to $\exp x_n \to +\infty$ i $\exp(-x_n) \to 0$.

Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Obrazem funkcji exp jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją.

---

1. Wykaż, że jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp x_n = \exp x$.

2. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(x+t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.

3. Udowodnij, że $\exp x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leqslant |x|^2 \cdot e^{|x|}$.

5. Niech $q \in (0,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1-q)\exp x + q \exp y > \exp\big((1-q)x + qy\big).$$