Analiza - klasa 4a Zestaw 13. 12.12.2024

Pochodna funkcji IV

Tw. 1. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas funkcja f' ma własność Darboux.

Tw. 2. (Reguła de l'Hospitala) Niech $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Funkcje $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ są różniczkowalne, $g'(x)\neq 0$ dla $x\in(a,b)$,

$$\lim_{x\to b} f(x)=\lim_{x\to b} g(x)=0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to b} g(x)=+\infty$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}=C\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

Wówczas

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=C.$$

Lemat. Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, gdzie $b\in\mathbb{R}\cup+\infty$ i dla każdego ciągu rosnącego $(x_n)_n$ takiego, że $x_n\to b$ zachodzi $f(x_n)\to c$. Wówczas $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=c$.

1. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 40 cm. Jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby okno miało największe pole powierzchni?

2. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa.

3. Parabola o równaniu $y=2-\dfrac{x^2}{2}$ przecina oś OX w punktach A i B. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ takie, że punkty C i D leżą na tej paraboli w górnej połowie układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów C i D, dla których pole trapezu $ABCD$ jest największe.

4. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla któregoś z nich objętość otrzymanej bryły będzie największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.

5. Korzystając z reguły de l'Hospitala (lub nie), oblicz granice:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-x}{\sin x-2x}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$,
   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$,
   (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$,
   (i) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,
   (j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{2\sin^2 x-1}$,
   (k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,
   (m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$,
   (n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$,
   (p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$,
   (q) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$,
   (r) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+x)\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right)$

6. Wyznacz granice w zależności od $a>0$.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^a}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^a}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^a}$.

7. Niech $f(x)=x-\sin x$, $g(x)=2x+\sin x$. Znajdź granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i wykaż, że granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje.

8. Oblicz granicę
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x^4)}-\cos(x^2)}{(\operatorname{tg} x-\sin x)(\ln(1+\arcsin x))}.$$

9. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, granica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0$.

10. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $a>0$ oraz
$$\lim_{x\to+\infty}(af(x)+f'(x))=b\in\mathbb{R}.$$
Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{b}{a}$.

11. Dla danej liczby $\lambda\geqslant 1$ niech $f(\lambda)$ oznacza (jedyne) rozwiązanie równania $x(1+\ln x)=\lambda$. Udowodnij, że
$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\ln\lambda\cdot f(\lambda)}{\lambda}=1.$$