Analiza - klasa 4a — Zestaw 12. — 28.11.2024

Pochodna funkcji III

Tw. 1 (Cauchy'ego o wartości średniej). Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tw. 2 (Lagrange'a o wartości średniej). Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Wniosek 3. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$. Wówczas funkcja f jest stała.

Tw. 4. Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b).

(i) Jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest niemalejąca.

(ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest rosnąca.

(iii) Jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest nierosnąca.

(iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest malejąca.

Tw. 5. Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne, $c \in (a,b)$ oraz $f'(c) = 0$

(i) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c minimum lokalne.

(ii) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c maksimum lokalne.

Jeżeli nierówności są ostre, to odp. ekstrema są właściwe.

---

1. Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij, że istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że
$$g'(\xi)f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

2. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

3. Udowodnij, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ jeśli $x > -1$.

4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_j \neq b_j$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że równanie
$$a_1x^{b_1} + a_2x^{b_2} + \ldots + a_nx^{b_n} = 0$$
ma co najwyżej $n-1$ pierwiastków dodatnich.

5. Funkcja $: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\inf f' > 0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

6. Udowodnij nierówności:
   (a) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x-y|$ dla $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
   (b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
   (c) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ dla $0 < b < a$.

7. Stosując tw. Cauchy'ego o wartości średniej udowodnij nierówności:
   (a) $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x$ dla $x \neq 0$,
   (b) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x$ dla $x > 0$,
   (c) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ dla $x \neq 0$,
   (d) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ dla $x > 0$.

8. Funkcja $f : (a, +\infty)$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = c$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = c$.

9. Udowodnij, że dla $x \geqslant -1$ zachodzą *nierówności Bernoulliego*:
   (a) $(1+x)^r \geqslant 1 + rx$ dla $r \geqslant 1$;
   (b) $(1+x)^r \leqslant 1 + rx$ dla $0 \leqslant r \leqslant 1$.

10. Udowodnij nierówności:
    (a) $2x\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;
    (b) $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$;
    (c) $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$, $x > 0$;
    (d) $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
    (e) $xe^{x/2} < e^x - 1$, $x > 0$;
    (f) $e^x < (1+x)^{1+x}$, $x > 0$;
    (g) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$;
    (h) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x$, $x > 0$;

11. Wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i kresy funkcji
    (a) $f(x) = xe^{-x^2}$, (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$, (c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[5]{x^2-2x+1}$.

12. Która z liczb jest większa: e^π czy π^e?

13. Wykaż, że jeśli $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \geqslant 1$, to $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

14. Wykaż, że dla dowolych liczb dodatnich a, b takich, że $a \neq b$ zachodzą nierówności
$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$
Liczbę $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ nazywamy *średnią logarytmiczną* liczb a i b.