Analiza - klasa 4a   Zestaw 11.   21.11.2024

Powtórzenie

1. Czy można określić $f(0)$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jeśli dla $x\neq 0$ (a) $f(x)=\exp(\frac{1}{x})$, (b) $f(x)=\exp(\frac{1}{x^2})$, (c) $f(x)=\exp(-\frac{1}{x^2})$?

2. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{e^{2\operatorname{arctg} x}-1} & \text{gdy } x\neq 0,\\ a & \text{gdy } x=0.\end{cases}$$

Dla jakich wartości $a\in\mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła?

3. Czy funkcja $f(x)=e^{-|x|}\sin x$ przyjmuje na $\mathbb{R}$ wartość największą i najmniejszą?

4. Udowodnij, że
(a) równanie $e^{\sin x}=2\cos x$ ma co najmniej 2 rozwiązania w przedziale $(0,2\pi)$
(b) równanie $10\sqrt{x}=e^x$ ma co najmniej 2 rozwiązanie w przedziale $(0,+\infty)$.

5. Funkcja $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. Wyznacz obraz funkcji f i udowodnij, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}: f([0,\frac{\pi}{2}))\to[0,\frac{\pi}{2})$. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{f^{-1}(x)}{x-1}.$$

6. Oblicz pochodną funkcji we wszystkich punktach, w których istnieje:

(a) $\arcsin\dfrac{1-e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$,   (b) $\sin^2(\sqrt{x})$,   (c) $\dfrac{\ln\left(\operatorname{arctg}(e^x)+\sqrt[3]{\sin x}\right)}{\cosh(\operatorname{arctg} x)}$.

7. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych a,b takie, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\cos x & \text{dla } x\geqslant 0\\ \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{dla } -\pi<x<0\end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi,\infty)$.

8. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x)=x+\sin x$.
(a) Udowodnij, że f jest bijekcją. Czy funkcja f^{-1} jest ciągłą?
(b) Wyznacz wszystkie $y\in\mathbb{R}$ takie, że funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w y.
(c) Oblicz $(f^{-1})'(0)$ i $(f^{-1})'(\frac{1}{2}\pi+1)$.

9. Udowodnij, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x$, ma różniczkowalną funkcję odwrotną. Wyznacz $f^{-1}(1)$ i $(f^{-1})'(1)$.