Analiza - klasa 4a   Zestaw 9.   7.11.2024

Pochodna funkcji I

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w puncie $x_0 \in (a, b)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0. Wyrażenie $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nazywamy *ilorazem róznicowym.*

Stosuje się także oznaczenie $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Stw. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to jest ona ciągła w tym punkcie.

Tw. (Arytmetyczne własności pochodnych) Jeżeli funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to

(i) funkcja $f + g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

(iii) gdy $g(x) \neq 0$ na pewnym otoczeniu x_0, to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Lemat o przybliżaniu funkcją liniową. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbb{R}$ i funkcja $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + \phi(x) \cdot (x - x_0) \qquad \text{dla } x \in (a, b)$$

oraz $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = 0$. Wówczas $k = f'(x_0)$.

Tw. (Pochodna złożenia funkcji) Jeżeli funkcja $g : (a, b) \to (c, d)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz funkcja $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $g(x_0) = y_0 \in (c, d)$, to funkcja $F = f \circ g : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$F'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Definicja. Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{pochodna prawostronna}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{pochodna lewostronna}$$

Jeżeli $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ i istnieje $f'_+(a)$ to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a) = f'_+(a)$. Podobnie definujemy różniczkowalność i pochodną funkcji $g : (a, b]$ w punkcie b.

Stw. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją obie pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0, są skończone i są sobie równe.

Definicja. Niech $I \subset \mathbb{R}$ oznacza przedział, Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie $x_0 \in I$. Funkcję $x \to f'(x)$, $x \in (a, b)$, nazywamy *pochodną* funkcji f.

Stw. (Pochodne funkcji elementarnych)

(i) $(x^a)' = ax^{a-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{N}$ lub $x > 0$ i $a > 0$ lub $x \neq 0$ i $a \in \mathbb{Z}$ lub $x \neq 0$ i $a = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ dla $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ dla $x > 0$;

(iv) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(v) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ dla $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{4x + 1}$ w punkcie $x_0 = 2$.

2. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

3. Wyznacz dziedzinę funkcji, oblicz jej pochodną i wyznacz dziedzinę pochodnej:

(a) $f(x) = \sqrt[4]{2x - x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^4 - 9}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + x^3}}$

(d) $f(x) = \operatorname{tg}^4(\sin x)$

(e) $f(x) = \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + 1\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x}} - 1\right)$

(f) $f(x) = \dfrac{\log_2(x^2 - 1)}{\operatorname{arctg} x}$

(g) $f(x) = xe^{x^2} - 3 \cdot 2^{\cos x}$

(h) $f(x) = x^x$

(i) $f(x) = x^{x^x}$

(j) $f(x) = (\sin \sqrt{x})^{\cos x}$

(k) $f(x) = \log_x e$

(l) $f(x) = \log_{x^2-1}(\cos x + 1)$

4. Niech $a > 0$ i

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

Dla jakich wartości a funkcja f jest różniczkowalna w 0?