Dowód zasadniczego twierdzenia algebry

Definicja. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do liczby zespolonej a wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n - a| \to 0$.

- $z_n \to a \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(a)$ i $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(a)$.
- Jeżeli $z_n \to a$, to $|z_n| \to |a|$.
- Z własności arytmetycznych granic ciągów liczb rzeczywistych wynikają identyczne własności arytmetyczne granic ciągów liczb zespolonych.

Stw. Z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ (lub $E \subset \mathbb{R}^2$ lub $E \subset \mathbb{R}$) jest *domknięty*, jeżeli dla każdego ciągu punktów $a_n \in E$ takiego, że $a_n \to a$ zachodzi $a \in E$.

Przykład: Koło $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ jest zbiorem domkniętym.

Definicja. . Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathbb{C}$, jeżeli dla dowolnego ciągu $z_n \to a$, $z_n \neq a$, zachodzi $f(z_n) \to f(a)$. Funkcja f jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie a.

Przykłady: Funkcja $f(z) = |z|$ jest ciągła. Jeżeli P jest wielomianem o zespolonych współczynnikach, to P jest funkcją ciągłą. Wówczas funkcja $g(z) = |P(z)|$ też jest ciągła.

Tw. Weierstrassa o kresach (wersja nad $\mathbb{C}$). Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Wówczas istnieją $a, b \in E$ takie, że

$$f(a) = \inf_E f \qquad \text{i} \qquad f(b) = \sup_E f.$$

Lemat. Niech $n \geqslant 1$, $P(z)$ jest wielomianem o zespolonych współczynnikach stopnia n. Wówczas istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Zasadnicze tw. algebry. Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Idea dowodu: Za pomocą Lematu pokazujemy, że $\inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = 0$.