Analiza - klasa 4a Zestaw 7. 17.10.2024

Ciągłość funkcji II

Definicja. Niech $I \subset \mathbb{R}$ to przedział. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ ma *własność Darboux* (*własność przyjmowania wartości pośrednich*), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$ i dowolnej liczby y leżącej pomiędzy $f(x_1)$ i $f(x_2)$ istnieje liczba t leżąca pomiędzy x_1 i x_2 i taka, że $f(t) = y$.

Tw. 1. Funkcja ciągła $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux.

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w 0.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego przedziału domkniętego $[c, d] \subset (a, b)$ jego obraz $f([c, d]) \subset \mathbb{R}$ również jest przedziałem domkniętym.

Wniosek. Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Wniosek. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ciągła i różnowartościowa jest ściśle monotoniczna.

Tw. 2. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to funkcja $f^{-1} : f(I) \to I$ jest ciągła.

Definicja (funkcje cyklometryczne).

(i) $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(ii) $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(iii) $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(iv) $\operatorname{arc\,ctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$.

Stw. 3. Funkcje cyklometryczne są ciągłe.

---

1. Funkcja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest ciągła. Udowodnij, że istnieje $c \in [0, 1]$ takie, że $f(c) = c$.

2. Funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Udowodnij, że istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = g(c)$.

3. (a) Udowodnij, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.
(b) Udowodnij, że równanie $e^x = 3x$ ma co najmniej dwa rozwiązania.
(c) Udowodnij, że równanie $2^x = \frac{1}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i malejąca. Udowodnij, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(c) = c$.

5. Funkcja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(0) = f(2)$. Udowodnij, ze istnieją punkty $a, b \in [0, 2]$ takie, że $b - a = 1$ i $f(a) = f(b)$.

6. Funkcja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągłą i nieograniczona z góry i z dołu. Udowodnij, że f przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.

7. Podaj przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie trzy razy. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie dwa razy?

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa i istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że n-ta iteracja funkcji f jest identycznością, czyli $f^n(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że
(a) jeśli f jest rosnąca, to $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
(b) jeśli f jest malejąca, to $f^2(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

9. Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$f(1000) = 999, \qquad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oblicz $f(500)$.

10. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i wyznacz granice

$$\lim_{x \to 0} f^{-1}(x), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x)}{x}.$$

11. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1 + x^2 + x^6}}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i oblicz granicę

$$\lim_{y \to 0} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}.$$

12. Udowodnij, że jeśli $x > 0$, to $\operatorname{arctg} x < x < \arcsin x$.

13. Oblicz granice funkcji $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ w $\pm\infty$.

14. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x}}$.

15. Udowodnij tożsamości

(a) $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad x \in [-1, 1]$

(b) $\arccos x = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$, $\quad x \in [0, 1]$

(c) $\arccos x = \dfrac{\arccos(2x^2 - 1)}{2}$, $\quad \arcsin x = \dfrac{\arccos(1 - 2x^2)}{2}$, $\quad x \in [0, 1]$

(d) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(e) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(f) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad x > 0$