

Ciągłość funkcji I

Wszędzie I, J to przedziały (skończone lub nie) zawarte w \mathbb{R} .

Definicja. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in I$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.
 Funkcja f jest ciągła (na I) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $c \in I$.

Ciągłość funkcji f w punkcie c jest równoważna warunkowi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta) |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Stw. 1. Jeżeli funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in I$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ też są ciągłe w punkcie c . Ponadto, jeżeli $f(c) \neq 0$ to funkcja $1/f$ jest określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt c i jest ciągła w c .

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją ciągłą na \mathbb{R} . Każda funkcja wymierna jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Stw. 2. Jeżeli $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w punkcie $c \in I$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $f(c)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie c .

Stw. 3. Każda z funkcji $\sqrt{x}, x^a (x > 0), x^k (k \in \mathbb{Z}), \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, a^x (a > 0), \log_a x$ są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja. Kresy górny i dolny funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy odpowiednio jako kres górny i dolny zbioru $f(A) \subset \mathbb{R}$. Kresy to zapisujemy jako $\sup_{x \in A} f(x)$ i $\inf_{x \in A} f(x)$ lub $\sup_A f$ i $\inf_A f$.

Tw. Weierstrassa o kresach Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $c, d \in [a, b]$ takie, że $f(c) = \sup_{[a,b]} f$ i $f(d) = \inf_{[a,b]} f$.

Wniosek. Każdy wielomian parzystego stopnia o dodatnim (ujemnym) współczynniku wiodącym przyjmuje wartość najmniejszą (największą).

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa, to f przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

1. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ciągłe są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{\sin(\sin(ax))} & \text{gdy } x < 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \\ x + c & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

2. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij, że funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

3. Funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $f = g$.
4. Funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Czy funkcja $h(x) = \max(f(x), g(x))$ jest ciągła?
5. Wyznacz zbiory punktów ciągłości funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

6. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ i $g(x) = [x^2] \sin(\pi x), x \in [0, +\infty)$.
7. Udowodnij, że funkcja Riemanna jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nie jest ciągła w każdym punkcie wymiernym.
8. Zbadaj ciągłość funkcji

$$(a) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, x > 0 \quad (c) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, x \geq 0$$

$$(b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad (d) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, x \in \mathbb{R}$$

9. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.
10. Wykaż, że jedyną funkcją ciągłą $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f(x+y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(1) = e$, jest funkcja $f(x) = e^x$.
11. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) \cdot x \cdot e^{-|x|}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą.
12. Funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, funkcja $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leq t \leq x\}.$$

Udowodnij, że funkcja g jest ciągła i niemalejąca.

13. Podaj przykład funkcji ograniczonej na przedziale $[0, 1]$, która
 - (a) nie przyjmuje swego kresu górnego i dolnego,
 - (b) nie przyjmuje kresu górnego i dolnego na żadnym przedziale $[a, b] \subset (0, 1)$.
14. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowa, ciągła i różna od stałej ma okres podstawowy (czyli minimalny okres dodatni).