Analiza - klasa 4a   Zestaw 5.   3.10.2024

Granica funkcji II

1. **Definicja Cauchy'ego granicy funkcji.** Niech $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A, $f : A \to \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
   (i) Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a.
   (ii) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A \setminus \{a\}} \; |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-g| < \varepsilon$.
2. Sformułuj i udowodnij warianty definicji Cauchy'ego granicy funkcji dla przypadków gdy $b = \pm\infty$ lub $g = \pm\infty$.
3. Funkcja $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ spełnia warunek
$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2.$$
   Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ dla każdego $c > 0$.
5. Niech $f : [0,1] \to [-M, M]$, $a, b > 1$ i $f(ax) = bf(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{a}]$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Powtórzenie

6. Rozwiąż równania
   (a) $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x-2)$,
   (b) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log\frac{1}{2} - \log x$,
   (c) $x + \log(1 + 2^x) = x\log 5 + \log 6$,
   (d) $(2x+1)^{\ln(2x+1)-3} = \dfrac{1}{e^2}$,
   (e) $\log_2(2^x + 4^x) - 3 = \log_4\left(\left(2^{2x-1} - \frac{1}{4}\right)^2\right)$.
7. Rozwiąż nierówności
   (a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$,
   (b) $2^{x^2-6x+3} \geqslant \dfrac{1}{4}$
   (c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$,
   (d) $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$.
8. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6^3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$.
9. Niech $a, b > 0$, $ab \neq 1$ i $\log_{ab} a = 4$. Oblicz $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.
10. Niech $a, b, c > 0$ i $a, b, ab \neq 1$. Oblicz wartość wyrażeń
   (a) $(\log_{ab} a)(\log_{ab}(ab^2)) + (\log_{ab} b)^2$,   (b) $a^{\sqrt{\log_a b}} + b^{\sqrt{\log_b a}}$.
11. Oblicz granice ciągów
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$,   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sinh\dfrac{1}{n}$,   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cosh\dfrac{1}{n} - 1\right)$.
12. Oblicz granice
   (a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$
   (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin x - \cos x}$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x}$
   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(1 + \ln(1+x)\big) \cdot \operatorname{tg}(e^x - 1)}{\cos(\sin x) - 1}$
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{x^2+1} - 1}{\ln(\cosh x)}$
   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$
   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{x - \sin x}{\sin x}\right)}{x - \sin x}$
   (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$
   (l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} + \sqrt[3]{x^3 - x + 2}$
   (m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x(x+1)^2} - \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
   (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+2} \cdot (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$
   (o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cosh\big(\ln(2x^2+1)\big)}{\sinh\big(\ln(x^2-1)\big)}$
13. Oblicz granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \big(\cos(2x)\big)^\pi}{\sin x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{x+2}}.$$
14. Udowodnij, że jeśli $-1 < x < 1$, to
$$\cosh x \leqslant \frac{1}{1-x^2} \quad \text{oraz} \quad |\sinh x| \leqslant \frac{|x|\sqrt{2-x^2}}{1-x^2}.$$