

Granica funkcji

Definicja. Niech $A \in \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru A , jeżeli istnieje ciąg liczb $a_n \in A \setminus \{b\}$ taki, że $a_n \rightarrow b$. Przyjmujemy, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru A nieograniczonego z góry, a $-\infty$ jest punktem skupienia zbioru A nieograniczonego z dołu. Umawiamy się, że $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w punkcie. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie b , jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \setminus \{b\}$, takiego że $a_n \rightarrow b$ zachodzi $f(a_n) \rightarrow g$. Piszemy wówczas $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} g$.

Granice jednostronne. Mówimy, że g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie $b \in \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \cap (b, +\infty)$ ($a_n \in A \cap (-\infty, b)$) takiego, że $a_n \rightarrow b$ zachodzi $f(a_n) \rightarrow g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = g \text{ (granica prawostronna)} \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g \text{ (granica lewostronna)}.$$

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g$.

Stw. 2. (Własności arytmetyczne granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i istnieją granice $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = d$,

gdzie $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas

- (i) jeśli jest określona suma/różnica $c \pm d$, to $\lim_{x \rightarrow b} (f(x) \pm g(x)) = c \pm d$.
- (ii) jeśli jest określony iloczyn $c \cdot d$, to $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) = cd$.
- (iii) jeśli jest określony iloraz $\frac{c}{d}$, to $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$.

Stw. 3. (Granica złożenia funkcji) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli

- $f(A) \subset B$,
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i $f(x) \neq b$ dla x dostatecznie bliskich a ,
- b jest punktem skupienia zbioru B i $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

to $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Stw. 4. (Ważne granice)

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{k}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1. Udowodnij, korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, że

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

2. Niech $a > 0$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

3. Oblicz granice, o ile istnieją, badając odpowiednie granice jednostronne.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x]$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + [x]}$

4. Oblicz granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + 2x^5}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2022} - 2022}{x^2 - 1}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{257} - 257x + 256}{(x-1)^2}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} + \sqrt[8]{x} + \sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x + 1024}}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x\sqrt{x}} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow -32} \frac{\sqrt{17-x} - 7}{2 + \sqrt[5]{x}}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7} - 3}{x + x^2 + x^3}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[99]{x})}{(1-x)^{99}}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$

5. Oblicz granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\alpha, \beta \neq 0$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \sin x} - \sqrt[3]{x - \sin x}}{\sqrt[3]{x}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{\ln^2(1 + \sin x)}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{e^{2x} - 2e^x + 1}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}$, $a \in \mathbb{R}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{3x^2} - 1)}{\operatorname{tg}^2(\sin(5x))}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{a}{x}}$, $a > 0$

6. Oblicz granice (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$.

7. Wykaż, że funkcja Riemanna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{NWD}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \text{ lub } x = 0 \end{cases}$$

ma w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ granicę równą 0.