Analiza - klasa 4a Zestaw 3. 17.2.2024

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna III

Funkcje hiperboliczne. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Funkcja $\cosh x$ maleje na półprostej $(-\infty, 0]$ i rośnie na $[0, +\infty)$, natomiast funkcja $\sinh x$ jest ściśle rosnąca.

(b) Zachodzi tożsamość zwaną *jedynką hiperboliczną*: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(c) Zachodzą tożsamości:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

---

1. Wyznacz funkcję odwrotną do $\cosh x$ na $[0, +\infty)$ i funkcję odwrotną do $\sinh x$.

2. Udowodnij, że funkcja $\mathrm{tgh} x$ jest rosnącą bijekcją $\mathbb{R}$ na przedział $(-1, 1)$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.

3. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\cosh x + \cosh y}{2} \geqslant \cosh \frac{x+y}{2},$$

natomiast dla $x, y \geqslant 0$ zachodzi także nierówność

$$\frac{\sinh x + \sinh y}{2} \geqslant \sinh \frac{x+y}{2}.$$

4. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\cosh x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

5. Rozwiąż równania:

(a) $7^{x-5} = 9^{5-x}$,

(b) $7^{x+1} + 7^x = 56$,

(c) $x^{x^2-5x+6} = 1$.

(d) $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$,

(e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$,

(f) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x-1}$,

(g) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$,

(h) $8^x(3x+1) = 4$,

(i) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$,

(j) $\log_{(x+2)} 16 = 2$,

(k) $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$,

(l) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$,

(m) $x^{\ln x} = e$

(n) $\frac{1}{5 - 4\log x} + \frac{4}{1 + \log x} = 3$,

(o) $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$,

(p) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$

(q) $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$

(r) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

(s) $\log_4\left(2\log_3\left(1 + \log_2(1 + \log_2 x)\right)\right) = \frac{1}{2}$

(t) $x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}$

6. Dla danej liczby $a > 0$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \big(\log(\log a) - 1\big) \cdot \log_x 10.$$

7. Wyznacz największą wartość funkcji $f : (0,1) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1-x).$$

8. Rozwiąż nierówności

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leqslant 8$

(b) $\frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729}$

(c) $8^x - 2 \leqslant 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$

(d) $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$

(e) $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{x+1} \geqslant 1$

(g) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(h) $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$

(i) $(x^2 + x + 1)^x < 1$

(j) $|x|^{x^2-x-2} < 1$

(k) $\log_3(x^2 - 1) < 1$

(l) $\ln(x+1) - \ln x < 2$

(m) $\log_{(2x-3)} x \leqslant 1$

(n) $\log_x(x-1) \geqslant 2$

(o) $\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geqslant 1$

(p) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4 - x^2}$

(q) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$

(r) $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5-x)} > 3$

9. Niech $a \in (0,1)$. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = a^x + (1-a)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż nierówności $f(x) < 1$ i $f(x) > 1$.