Analiza - klasa 4a Zestaw 2. 10.9.2024

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna II

Definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym. Niech $a > 0$. Wiemy już, że jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $a^x = \exp(x \ln a)$. Ostatnia równość ma sens dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc definiujemy potęgę liczby a z wykładnikiem $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy *funkcją wykładniczą* o podstawie a.

Stw. 1. Jeżeli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ to
(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ i $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ (ii) $a^{xy} = (a^x)^y$, (iii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

Stw. 2. Obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$ jest zbiór $(0, +\infty)$. Ponadto

- Jeżeli $a > 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle rosnąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to +\infty$ i $a^{-x_n} \to 0$.
- Jeżeli $a < 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle malejąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to 0$ i $a^{-x_n} \to +\infty$.

Definicja logarytmu. Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas funkcja $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją, ma więc funkcję odwrotną. *Logarytmem* o podstawie a z liczby $y > 0$ nazywamy jedyną liczbę rzeczywistą x taką, że $a^x = y$. Piszemy wówczas

$$\log_a y = x.$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i zapisujemy $\log y = \log_{10} y$. Oczywiście $\ln y = \log_e y$.

Stw. 3. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

(i) $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;

(iii) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ dla $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$.

Stw. 4. Funkcja $x \to \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$, a jej obrazem jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Stw. 5. (Zmiana podstawy logarytmu) Niech $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x > 0$. Wówczas

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

---

1. Czy liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać liczbę wymierną?

2. Wykaż, że dla $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$, $a_i \neq 1$

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{k-1}} a_k \cdot \log_{a_k} a_1 = 1.$$

3. Wykaż, że dla $a, b > 0$, $a \neq 1$, oraz $p \neq 0$ zachodzi równość $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b$.

4. Uprość wyrażenia

(a) $\log_{3\sqrt{3}} 27$

(b) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

(c) $(\sqrt{2})^{\log_2 9}$

(d) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$

(e) $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$

(f) $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$

(g) $\log_{16} \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{7} \cdot \log_{\frac{1}{49}} 32$

(h) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

5. Znajdź granice ($a > 0$ i $a \neq 1$)

(a) $\lim_{n\to\infty} (\log_a(n+1) - \log_a n)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^t}$, $t > 0$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \log_n x$, $x > 0$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_a n}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log_a n}}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \log_n(n+1)$.

6. Wykaż, że jeśli $0 < a < 1 < b$, to $\log_a b + \dfrac{1}{4} \log_b a + 1 \leqslant 0$.

7. Niech $a, b, c, x > 0$ i $a, b, c, abc \neq 1$. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

8. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ i $x_1 x_2 \ldots x_n = a$. Udowodnij, że

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \ldots + (\log_a x_n)^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

9. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$

$$\log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(a_n) + \log_{a_n}(a_1) \geqslant n.$$

10. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, x > 1$

$$\log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}(x) \leqslant \sqrt[n]{\log_{a_1}(x) \cdot \log_{a_2}(x) \cdot \ldots \cdot \log_{a_n}(x)}.$$

11. Niech $x > 0$. Udowodnij nierówność $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x)$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $a_n \neq 1$ i $a_n \to 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

13. Oblicz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$