Analiza - klasa 4a Zestaw 21. 18.4.2024

Całka Newtona

Definicja. Niech $a < b$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. *Całka Newtona (całka oznaczona)* funkcji f na przedziale $[a,b]$ jest to liczba

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f. Ten sam wzór uznajemy za definicję całki oznaczonej w przypadku $a > b$.

Stw. 1. (Liniowość całki Newtona) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 2. (Wzór na całkowanie przez części) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i funkcje f', g' są ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 3. (Wzór na całkowanie przez podstawienie) Niech $g : [a,b] \to I \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że funkcja g' jest ciągła i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f.

Stw. 4. (Monotoniczność całki) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geqslant g$ na $[a,b]$, to $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 5. (Tw. o wartości średniej dla całek) Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla pewnego $\xi \in (a,b)$ zachodzi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$.

Tw. 6. (Przybliżanie całki sumami całkowymi) Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych punktów $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takich, że $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Interpretacja geometryczna całki Newtona: Jeżeli $f : [a,b] \to [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest równa polu pod wykresem funkcji f.

---

1. Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij nierówności

(i) $\displaystyle (b-a)\inf_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} f$

(ii) $\displaystyle \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

3. Funkcja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że

(a) jeśli f jest parzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) jeśli f jest nieparzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij równości

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

5. Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

6. Udowodnij nierówność $\displaystyle\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{17}{18} + \frac{1}{600}$.

7. Funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale zawierającym liczbę a. Udowodnij, że $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$.

8. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$,

9. Wyprowadź wzór na pole elipsy o równaniu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

10. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$.