# Analiza - klasa 4a Zestaw 20. 11.4.2024

## Całka nieoznaczona II

**Funkcje hiperboliczne.** Przypomnijmy:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Łatwo wyprowadzić tożsamości

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \text{(tzw. jedynka hiperboliczna)},$$
$$\cosh(2x) = 2\sinh^2 x - 1,$$
$$\sinh(2x) = 2\cosh x \cdot \sinh x.$$

Łatwo sprawdzić, że $\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$ i $\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$.
Sinus i cosinus hiperboliczny mają funkcje odwrotne:

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \ y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right), \ y \geqslant 1$$

oraz

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad (\operatorname{arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \ y > 1.$$

Mamy więc kolejne ważne funkcje pierwotne:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C.$$

**Tw. o całkowaniu przez podstawienie.** Załóżmy, że funkcja $f$ jest ciągła, funkcja $g$ jest różniczkowalna i $g'$ jest ciągła, oraz $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$. Wówczas

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Do całkowania funkcji wymiernych przydatne jest twierdzenie:

**Tw. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste.** Każda funkcja wymierna $F$ jest sumą pewnego wielomianu i pewnej liczby ułamków prostych, czyli funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \ A, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^k}, \ A, B, a \in \mathbb{R}, b > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami mianownika $F$.

**1.** Oblicz całki, stosując tw. o całkowaniu przez podstawienie:

(a) $\int x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int x\sqrt{4-x^2} \, \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

(e) $\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{\ln^5 x}{x} \, \mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(h) $\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

(i) $\int \sqrt{x^2-1} \, \mathrm{d}x$

(j) $\int \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

(k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$,

(l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,

(m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$

(n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$,

(o) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

**2.** Oblicz całki

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \operatorname{arsinh} x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}.$$

**3.** Oblicz całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$

(b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+x^3}$

(c) $\int \frac{x}{1+x^3} \, \mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$

(e) $\int \frac{x^3}{x^4+1} \, \mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{x^2}{1-x^4} \, \mathrm{d}x$

**4.** Udowodnij istnienie funkcji pierwotnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$