Analiza - klasa 4a　　Zestaw 19.　　10.4.2024

Całka nieoznaczona I

Operacja odwrotna do różniczkowania funkcji nazywana jest *całkowaniem*: mając daną funkcję f szukamy funkcji F takiej, że $F' = f$. Niestety, w odróżnieniu od różniczkowania, które w zasadzie jest czynnością mechaniczną, całkowanie funkcji bywa trudne, wymaga pomysłowości i nie zawsze jest wykonalne.

Definicja. Załóżmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest sumą rozłącznych przedziałów i dana jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$. Każdą funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x \in D$ zachodzi $F'(x) = f(x)$ nazywamy *całką nieoznaczoną* lub *funkcją pierwotną* funkcji f. Piszemy

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Najważniejsze funkcje pierwotne:

$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x, dla którego określona jest funkcja x^a,
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$,
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$,
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C$.

Występująca w powyższych wzorach stała C jest nazywana *stałą całkowania*. Jeżeli dziedzina funkcji składa się z kilku przedziałów rozłącznych, na każdym przedziale wartość stałej całkowania może być inna.

Tw. 1. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja f ma funkcję pierwotną. (dowód pomijamy)

Stw. 2. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f : I \to \mathbb{R}$ i F jest funkcją pierwotną funkcji f, to F jest funkcją ciągłą.

Stw. 3. (liniowość całki). Jeżeli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ mają funkcje pierwotne i $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 4. (podstawienie liniowe). Jeżeli $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ oraz $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, to

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Tw. 5. (Wzór na całkowanie przez części). Jeżeli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

1. $\int (x^4 + 2x^3 - x^2 - 7)\,\mathrm{d}x$,

2. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

3. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

4. $\int (4\sin(5x) - 5\cos(4x))\,\mathrm{d}x$,

5. $\int |x|\,\mathrm{d}x$,

6. $\int \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$,

7. $\int a^x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

8. $\int \frac{1}{3-2x}\,\mathrm{d}x$,

9. $\int \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$,

10. $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

11. $\int \ln_a x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

12. $\int xe^x\,\mathrm{d}x$,

13. $\int \sin x \cdot e^x\,dx$,

14. $\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$,

15. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

16. $\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$,

17. $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

18. $\int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

19. $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$,

20. $\int x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$,

21. $\int x\sin xe^x\,\mathrm{d}x$,

22. $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

23. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest różniczkowalna. Udowodnij, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

24. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

25. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

26. $\int \frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$,

27. $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,\mathrm{d}x$,

28. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

29. $\int \frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.