Analiza - klasa 4a Zestaw 18. 20.3.2024

Pochodne wyższych rzędów

Definicja. Załóżmy, że $I \subset R$ jest przedziałem i $f : I \to R$. Pochodną rzędu 0 funkcji f nazywamy samą funkcję f. Możemy pisać $f^{(0)} = f$.

Pochodną rzędu n funkcji f w punkcie $a \in I$ definiujemy jako pochodnę funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie a, czyli
$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a).$$

Jeżeli ta pochodna (jako odp. granica) istnieje, to mówimy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a. Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie $x \in I$, to mówimy, że jest ona n-krotnie różniczkowalna (na przedziale I). Funkcję $x \mapsto f^{(n)}(x)$, $(x \in I)$ nazywamy wówczas n-tą pochodną funkcji f lub pochodną rzędu n funkcji f.

Stw. 1. (Wzór Leibniza) Załóżmy, że funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są n-krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in I$. Wówczas
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Tw. 2. (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $n + 1$ włącznie. Niech $c \in (a, b)$ Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$, istnieje punkt ξ leżący pomiędzy c i x, że
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Uwaga: Występujący w powyższym wzorze wielomian $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ nazywamy *n-tym wielomianem Taylora* funkcji f w punkcie c, funkcję $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazywamy *n-tą resztą Taylora* funkcji f w punkcie c.

---

1. Wyznacz funkcję $f^{(n)}(x)$ dla (a) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \ln(a + x)$, $a > 0$, (c) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, (d) $f(x) = \sin(ax)$, $a \neq 0$, (e) $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, (f) $f(x) = a^x$, $a > 0$.

2. Oblicz n-tą pochodną funkcji (a) $f(x) = xe^x$, (b) $g(x) = x^3 \sin(5x)$.

3. Niech
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$ dla $x \neq 0$, gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

4. Wielomiany Hermite'a. Niech $f(x) = e^{-x^2}$ i dla $n = 0, 1, 2, \ldots$
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot f^{(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Wykaż, że dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ funkcja H_n jest wielomianem stopnia n.

(b) Udowodnij zależność rekurencyjną $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

5. Załóżmy, że P jest wielomianem stopnia n. Udowodnij, że dla dowolnych $c, x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x-c) + \frac{P''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Wyznacz k-ty wielomian Taylora wielomianu P w punkcie c.

6. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

7. Wyznacz n-ty wielomian i resztę Taylora w zerze funkcji z zadania 4.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzą nierówności

(a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$

(b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

9. Znajdź przybliżenie wymierne liczby $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3}.

10. Udowodnij, że
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

11. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 0$
$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{xe^x}{n}.$$

12. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ i funkcja f'' istnieje na przedziale $(0, 1)$ i $|f''(x)| \leqslant A$ dla każdego $x \in (0, 1)$. Udowodnij, że
$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2} \qquad \text{dla } x \in [0, 1].$$