Analiza - klasa 4a Zestaw 17. 7.3.2024

Funkcje wypukłe

Niech $I \subset \mathbb{R}$ bedzie przedziałem, półprostą lub prostą. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla wszystkich $x, y \in I$ i dowolnego $\lambda \in (0,1)$ zachodzi nierówność

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

zwana *nierównością Jensena.* Jeżeli ta nierówność jest ostra dla dowolnych x, y, t j.w. to mówimy, że f jest *ściśle wypukła.* Jeżeli nierówność Jensena zachodzi w przeciwną stronę, to mówimy, że f jest *wklęsła.*

Uwaga: Funkcja f jest (ściśle) wypukła wtw. gdy $-f$ jest (sciśle) wklęsła.

Interpretacja geometryczna. Funkcja f jest ściśle wypukła wtw. gdy każda cięciwa łącząca dwa punkty należące do wykresu f leży nad tym wykresem.

Stw. 1. Funkcja wypukła $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Lemat. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtw. gdy dla dowolnych $x, c, y \in I$, $x < c < y$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłych nierówność jest ostra.

Tw.2. (Nierówność Jensena) Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ i $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, to

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

Tw. 3. Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f' jest niemalejąca (ściśle rosnąca). Funkcja f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f' jest nierosnąca (ściśle malejąca)

Wniosek. Funkcja 2-krotnie różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f” jest nieujmena (dodatnia); f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f” jest niedodatnia (ujemna).

---

1. Zbadaj, na jakich przedziałach są wklęsłe / wypukłe funkcje (a) $f(x) = xe^x$, (b) $\sin x$, (c) $\operatorname{tg} x$, (d) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ (e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

2. Jak jest maksymalna liczba przedziałów wklęsłości / wypukłości wielomianu stopnia n?

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na $(0, +\infty)$

4. **Uogólniona nierówność Cauchy'ego:** Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x^{\alpha_n}.$$

5. Niech $a > 1$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^a \leqslant \frac{x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a}{n}.$$

6. Udowodnij **Nierówność Younga:** Jeśli $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x, y \geqslant 0$

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

7. Udowodnij **Nierówność Höldera:** Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oblicz granicę prawej strony, gdy $p \to +\infty$.

8. Stosując nierówność Höldera udowodnij, **nierówność Minkowskiego**: Jeśli $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ i $p \geqslant 1$, to

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

9. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ i $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Udowodnij nierówności

$$\text{(a)} \prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leqslant (\sin x)^n, \qquad \text{(b)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$1 + \sqrt[4]{e^a e^b e^c e^d} \leqslant \sqrt[4]{(1 + e^a)(1 + e^b)(1 + e^c)(1 + e^d)}.$$

11. Niech $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Wykaż, że

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x + y + z}{3}\right)\right)^3 \geqslant (1 - \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} z).$$

12. Funkcja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest wypukła i $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest rosnąca na $(0, +\infty)$.