Analiza - klasa 4a Zestaw 16. 14.2.2024

Pochodna funkcji IV

Tw. 1. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas funkcja f' ma własność Darboux.

Tw. 2. (Reguła de l'Hospitala) Niech $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$,

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Wówczas

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Lemat. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, gdzie $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ i dla każdego ciągu rosnącego $(x_n)_n$ takiego, że $x_n \to b$ zachodzi $f(x_n) \to c$. Wówczas $\lim_{x\to b} f(x) = c$.

---

1. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 40 cm. Jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby okno miało największe pole powierzchni?
2. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa.
3. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ przecina oś OX w punktach A i B. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ takie, że punkty C i D leżą na tej paraboli w górnej połowie układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów C i D, dla których pole trapezu $ABCD$ jest największe.
4. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla któregoś z nich objętość otrzymanej bryły będzie największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.
5. Udowodnij, że funkcja $f(x) = e^x + x$ ma różniczkowalną funkcję odwrotną. Wyznacz $f^{-1}(1)$ i $(f^{-1})'(1)$.
6. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ ma funkcję odwrotną. Wyznacz wszystkie punkty, w których funkcja f^{-1} jest różniczkowalna.
7. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = e^x + \log_{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$ ma różniczkowalną funkcję odwrotną i oblicz $f^{-1}(2)$ i $(f^{-1})'(2)$.
8. Korzystając z reguły de l'Hospitala (lub nie), oblicz granice:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,

(d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$,

(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$,

(f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x - 1}$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x$,

(h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$,

(i) $\lim_{x\to 1} (x^2 - 1)\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$,

(j) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2\sin^2 x - 1}$,

(k) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

(m) $\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$,

(n) $\lim_{x\to 0} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$,

(p) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$,

(q) $\lim_{x\to 1} (2 - x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$,

(r) $\lim_{x\to +\infty} \ln(e^x + x) \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$

9. Niech $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = 2x + \sin x$. Znajdź granicę $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i wykaż, że granica $\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje.
10. Wyznacz granice w zależności od $a > 0$.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^a}$.

11. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x^4)} - \cos(x^2)}{(\operatorname{tg} x - \sin x)(\ln(1 + \arcsin x))}$.
12. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, granica $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona oraz istnieje granica $\lim_{x\to +\infty} x f'(x)$. Udowodnij, że $\lim_{x\to +\infty} x f'(x) = 0$.
13. Funkcja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $a > 0$ oraz

$$\lim_{x\to +\infty} (af(x) + f'(x)) = b \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{b}{a}$.

14. Dla danej liczby $\lambda \geqslant 1$ niech $f(\lambda)$ oznacza (jedyne) rozwiązanie równania $x(1 + \ln x) = \lambda$. Udowodnij, że

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln \lambda \cdot f(\lambda)}{\lambda} = 1.$$