# Analiza - klasa 4a    Zestaw 15.    7.2.2024

## Pochodna funkcji III

**Tw. 1 (Cauchy'ego o wartości średniej).** Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na $(a,b)$ oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Tw. 2 (Lagrange'a o wartości średniej).** Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

**Wniosek 3.** Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$ oraz $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$. Wówczas funkcja $f$ jest stała.

**Tw. 4.** Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $(a,b)$.

(i) Jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja $f$ jest niemalejąca.

(ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja $f$ jest rosnąca.

(iii) Jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja $f$ jest nierosnąca.

(iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja $f$ jest malejąca.

**Tw. 5.** Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne, $c \in (a,b)$ oraz $f'(c) = 0$

(i) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to $f$ ma w $c$ minimum lokalne.

(ii) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to $f$ ma w $c$ maksimum lokalne.

Jeżeli nierówności są ostre, to odp. ekstrema są właściwe.

---

**1.** Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na $(a,b)$ oraz $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij, że istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$g'(\xi)f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

**2.** Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

**3.** Udowodnij, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ jeśli $x > -1$.

**4.** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_j \neq b_j$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że równanie

$$a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \ldots + a_n x^{b_n} = 0$$

ma co najwyżej $n-1$ pierwiastków dodatnich.

**5.** Funkcja $: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\inf f' > 0$. Udowodnij, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

**6.** Udowodnij nierówności:

(a) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x-y|$ dla $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;

(c) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ dla $0 < b < a$.

**7.** Stosując tw. Cauchy'ego o wartości średniej udowodnij nierówności:

(a) $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x$ dla $x \neq 0$,

(b) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x$ dla $x > 0$,

(c) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ dla $x \neq 0$,

(d) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ dla $x > 0$.

**8.** Funkcja $f : (a, +\infty)$ jest różniczkowalna i $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = c$. Udowodnij, że $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = c$.

**9.** Udowodnij, że dla $x \geqslant -1$ zachodzą *nierówności Bernoulliego*:

(a) $(1+x)^r \geqslant 1 + rx$ dla $r \geqslant 1$;

(b) $(1+x)^r \leqslant 1 + rx$ dla $0 \leqslant r \leqslant 1$.

**10.** Udowodnij nierówności:

(a) $2x\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$;

(c) $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$, $x > 0$;

(d) $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

(e) $xe^{x/2} < e^x - 1$, $x > 0$;

(f) $e^x < (1+x)^{1+x}$, $x > 0$;

(g) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$;

(h) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x$, $x > 0$;

**11.** Wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i kresy funkcji

(a) $f(x) = xe^{-x^2}$,  (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$,  (c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[5]{x^2-2x+1}$.

**12.** Która z liczb jest większa: $e^\pi$ czy $\pi^e$?

**13.** Wykaż, że jeśli $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \geqslant 1$, to $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

**14.** Wykaż, że dla dowolych liczb dodatnich $a, b$ takich, że $a \neq b$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

Liczbę $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ nazywamy *średnią logarytmiczną* liczb $a$ i $b$.