Analiza - klasa 4a Zestaw 14. 31.1.2024

Pochodna funkcji II

Tw. (Pochodna funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja $f : (a,b) \to (c,d)$ jest bijekcją, jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) \neq 0$ i funkcja odwrotna $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych:

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemat Fermata. Jeżeli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a,b)$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

Tw. Rolle'a. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

---

1. Określ parametry a, b, c, d tak, aby funkcja f miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x \leqslant 1, \\ ax^2 + c & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{dx^2+1}{x} & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

2. Podaj przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna nie jest ciągła.

3. Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P i $k > 1$. Wykaż, że x_0 jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu P'.

4. Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w $x_0 \in (a,b)$. Wykaż, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w x_0?

5. Znajdź wzory dla sum (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ke^{kx}$.

6. Funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$,

7. Funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Znajdź wzór na $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)'(x_0)$.

8. Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \ln x$ korzystając z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej.

9. Oblicz pochodne

(a) $f(x) = \sin(\arccos x)$

(b) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{5x})$

(d) $f(x) = \ln^3(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})$

10. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że wielomian W' ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

11. Funkcja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, +\infty)$ i różniczkowalna na $(a, +\infty)$ oraz $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Wykaż, że istnieje $\xi \in (a, +\infty)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

12. Wielomian P stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a \neq 0$ wielomian $P'(x) + aP(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.