Analiza - klasa 4a Zestaw 13. 4.1.2024

Pochodna funkcji I

Definicja. Mówimy, że funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w puncie $x_0\in(a,b)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0. Wyrażenie $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nazywamy *ilorazem róznicowym.*

Stosuje się także oznaczenie $f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Stw. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$, to jest ona ciągła w tym punkcie.

Tw. (Arytmetyczne własności pochodnych) Jeżeli funkcje $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0\in(a,b)$, to

(i) funkcja $f+g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

(ii) funkcja $f\cdot g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;

(iii) gdy $g(x)\neq 0$ na pewnym otoczeniu x_0, to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Lemat o przybliżaniu funkcją liniową. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k\in\mathbb{R}$ i funkcja $\phi:(a,b)\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f(x)=f(x_0)+k\cdot(x-x_0)+\phi(x)\cdot(x-x_0)\qquad \text{dla } x\in(a,b)$$

oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=0$. Wówczas $k=f'(x_0)$.

Tw. (Pochodna złożenia funkcji) Jeżeli funkcja $g:(a,b)\to(c,d)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ oraz funkcja $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $g(x_0)=y_0\in(c,d)$, to funkcja $F=f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$F'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Definicja. Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna prawostronna}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna lewostronna}$$

Jeżeli $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ i istnieje $f'_+(a)$ to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a)=f'_+(a)$. Podobnie definujemy różniczkowalność i pochodną funkcji $g:(a,b]$ w punkcie b.

Stw. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją obie pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0, są skończone i są sobie równe.

Definicja. Niech $I\subset\mathbb{R}$ oznacza przedział, Mówimy, że funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie $x_0\in I$. Funkcję $x\to f'(x)$, $x\in(a,b)$, nazywamy *pochodną* funkcji f.

Stw. (Pochodne funkcji elementarnych)

(i) $(x^a)'=ax^{a-1}$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $a\in\mathbb{N}$ lub $x>0$ i $a>0$ lub $x\neq 0$ i $a\in\mathbb{Z}$ lub $x\neq 0$ i $a=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

(ii) $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$ dla $a>0$ i $x\in\mathbb{R}$;

(iii) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ dla $x>0$;

(iv) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ dla $x\in\mathbb{R}$;

(v) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ dla $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(\operatorname{ctg} x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x)=\sqrt{4x+1}$ w punkcie $x_0=2$.

2. Zbadaj różniczkowalność fukcji $f(x)=|x|$ i $g(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0=0$.

3. Wyznacz dziedzinę funkcji, oblicz jej pochodnę i wyznacz dziedzinę pochodnej:

(a) $f(x)=\sqrt[4]{2x-x^2}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x^4-9}$

(c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$

(d) $f(x)=\operatorname{tg}^4(\sin x)$

(e) $f(x)=\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}-1\right)$

(f) $f(x)=\dfrac{\log_2(x^2-1)}{\operatorname{arctg} x}$

(g) $f(x)=xe^{x^2}-3\cdot 2^{\cos x}$

(h) $f(x)=x^x$

(i) $f(x)=x^{x^x}$

(j) $f(x)=(\sin\sqrt{x})^{\cos x}$

(k) $f(x)=\log_x e$

(l) $f(x)=\log_{x^2-1}(\cos x+1)$

4. Niech $a>0$ i

$$f(x)=\begin{cases}|x|^a\cdot\sin\dfrac{1}{x} & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$$

Dla jakich wartości a funkcja f jest różniczkowalna w 0?