Analiza - klasa 4a Zestaw 10. 30.1.2023

Funkcje ciągłe I

Wszędzie I, J to przedziały (skończone lub nie) zawarte w $\mathbb{R}$.

Definicja. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in I$, jeżeli $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funkcja f jest ciągła (na I) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $c \in I$.

Ciągłość funkcji f w punkcie c jest równoważna warunkowi:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in(c-\delta,c+\delta)} |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Stw. 1. Jeżeli funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in I$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ też są ciągłe w punkcie c. Ponadto, jeżeli $f(c) \neq 0$ to funkcja $1/f$ jest określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt c i jest ciągła w c.

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Każda funkcja wymierna jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Stw. 2. Jeżeli $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w punkcie $c \in I$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $f(c)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie c.

Stw. 3. Każda z funkcji $\sqrt[k]{x}$, x^a $(x > 0)$, x^k $(k \in \mathbb{Z})$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a > 0)$, $\log_a x$ są jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja. *Kresy górny i dolny funkcji* $f : A \to \mathbb{R}$ definiujemy odpowiednio jako kres górny i dolny zbioru $f(A) \subset \mathbb{R}$. Kresy to zapisujemy jako $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ i $\inf\limits_{x\in A} f(x)$ lub $\sup\limits_A f$ i $\inf\limits_A f$.

Tw. Weierstrassa o kresach Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $c, d \in [a, b]$ takie, że $f(c) = \sup\limits_{[a,b]} f$ i $f(d) = \inf\limits_{[a,b]} f$.

Wniosek. Każdy wielomian parzystego stopnia o dodatnim (ujemnym) współczynniku wiodącym przyjmuje wartość najmniejszą (największą).

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa, to f przyjmuje wartość nawiększą i najmniejszą.

---

1. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ciągłe są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{\sin(\sin(ax))} & \text{gdy } x < 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \\ x + c & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

2. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij, że funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

3. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Udowodnij, żde $f = g$.

4. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Czy funkcja $h(x) = \max(f(x), g(x))$ jest ciągła?

5. Wyznacz zbiory punktów ciągłości funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

6. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ i $g(x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin(\pi x)$, $x \in [0, +\infty)$.

7. Udowodnij, że funkcja Riemanna jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nie jest ciągła w każdym punkcie wymiernym.

8. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ okresowa, ciągła i różna od stałej ma okres podstawowy (czyli minimalny okres dodatni).

9. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że $f(x+y) = f(x)+f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

10. Wykaż, że jedyną funkcją ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x + y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(1) = e$, jest funkcja $f(x) = e^x$.

11. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot x \cdot e^{-|x|}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

12. Funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, funkcja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant x\}.$$

Udowodnij, że funkcja g jest ciągła i niemalejąca.

13. Podaj przykład funkcji ograniczonej na przedziale $[0, 1]$, która
(a) nie przyjmuje swego kresu górnego i dolnego,
(b) nie przyjmuje kresu górnego i dolnego na żadnym przedziale $[a, b] \subset (0, 1)$.

14. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + |f(x)|}$ też przyjmuje wartość największą i najmniejszą.