

Granica funkcji II

1. Wykaż, że funkcja Dirichleta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie ma granicy w żadnym punkcie.

2. **Definicja Cauchy'ego granicy funkcji.** Niech $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a .
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{a\} |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

3. Sformułuj i udowodnij warianty definicji Cauchy'ego granicy funkcji dla przypadków gdy $b = \pm\infty$ lub $g = \pm\infty$.

4. Funkcja $f : (-a, a) \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1 \text{ dla każdego } c > 0.$$

6. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [-M, M]$, $a, b > 1$ i $f(ax) = bf(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{a}]$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Powtórzenie

7. Rozwiąż równania

- (a) $16^x + 1 = 2^8 + 8^4$,
(b) $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x-2)$,
(c) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log \frac{1}{2} - \log x$,
(d) $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$,
(e) $(2x+1)^{\ln(2x+1)-3} = \frac{1}{e^2}$.

8. Rozwiąż nierówności

- (a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$,
(b) $2^{x^2-6x+3} \geq \frac{1}{4}$
(c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$,
(d) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.

9. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6^3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$.

10. Niech $a, b > 0$, $ab \neq 1$ i $\log_{ab} a = 4$. Oblicz $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

11. Niech $a, b, c > 0$ i $a, b, ab \neq 1$. Oblicz wartość wyrażen
(a) $(\log_{ab} a)(\log_{ab}(ab^2)) + (\log_{ab} b)^2$, (b) $a\sqrt{\log_a b} + b\sqrt{\log_b a}$.

12. Oblicz granice ciągów

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sinh \frac{1}{n}$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cosh \frac{1}{n} - 1 \right)$.

13. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\cosh x + \cosh y}{2} \geq \cosh \frac{x+y}{2},$$

natomiast dla $x, y \geq 0$ zachodzi także nierówność

$$\frac{\sinh x + \sinh y}{2} \geq \sinh \frac{x+y}{2}.$$

14. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

15. Oblicz granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}$
(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$
(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin x - \cos x}$
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$
(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \ln(1+x)) \cdot \operatorname{tg}(e^x - 1)}{\cos(\sin x) - 1}$
(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+2} \cdot (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
(g) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$
(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^2+1} - 1}{\ln(\cosh x)}$
(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{x - \sin x}{\sin x}\right)}{x - \sin x}$
(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$
(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2+1} + \sqrt[3]{x^3-x+2}$
(m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x(x+1)^2} - \sqrt[3]{x(x-1)^2}$