Analiza - klasa 4a Zestaw 8. 15.11.2023

Granica funkcji I

Definicja. Niech $A \in \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru A, jeżeli istnieje ciąg liczb $a_n \in A \setminus \{b\}$ taki, że $a_n \to b$. Przyjmujemy, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z góry, a $-\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z dołu. Umawiamy się, że $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w punkcie. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie b, jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \setminus \{b\}$, takiego że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x\to b} g$.

Granice jednostronne. Mówimy, że g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie $b \in \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \cap (b, +\infty)$ ($a_n \in A \cap (-\infty, b)$) takiego, że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = g \text{ (granica prawostronna)} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = g \text{ (granica lewostronna).}$$

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = g$.

Stw. 2. (Własności arytmetyczne granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i istnieją granice $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = d$, gdzie $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas

(i) jeśli jest określona suma/różnica $c \pm d$, to $\lim\limits_{x\to b}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$.

(ii) jeśli jest określony iloczyn $c \cdot d$, to $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = cd$.

(iii) jeśli jest określony iloraz $\dfrac{c}{d}$, to $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$.

Stw. 3. (Granica złożenia funkcji) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. Jeżeli

- $f(A) \subset B$,
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i $f(x) \neq b$ dla x dostatecznie bliskich a,
- b jest punktem skupienia zbioru B i $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

to $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Stw. 4. (Ważne granice)

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[k]{x+1} - 1}{x} = \dfrac{1}{k}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1. Udowodnij, korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, że

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$

2. Niech $a > 0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$.

3. Oblicz granice, o ile istnieją, badając odpowiednie granice jednostronne.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \lceil x \rceil$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \lfloor x \rfloor$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x + \lfloor x \rfloor}$

4. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^{2022}-2022}{x^2-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}-8}{\sqrt[4]{x}-2}$

(j) $\lim\limits_{x\to -32} \dfrac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7}-3}{x+x^2+x^3}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{3})\ldots(1-\sqrt[99]{x})}{(1-x)^{99}}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

5. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\alpha, \beta \neq 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+\sin x}-\sqrt[3]{x-\sin x}}{\sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(e^x-1)}{\ln^2(1+\sin x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos^2 x)}{e^{2x}-2e^x+1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, $a > 0$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^{3x^2}-1)}{\operatorname{tg}^2(\sin(5x))}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{a}{x}}$, $a > 0$

6. Oblicz granice (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x-1)^x$.

7. Wykaż, że **funkcja Riemanna** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x = \frac{p}{q},\ \text{gdzie } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NWD}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \text{ lub } x = 0 \end{cases}$$

ma w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ granicę równą 0.