

## Funkcje wykładnicza i logarytmiczna III

1. Funkcje hiperboliczne. Dla  $x \in \mathbb{R}$  niech

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- (a) Udowodnij, że funkcja  $\cosh x$  maleje na półprostej  $(-\infty, 0]$  i rośnie na  $[0, +\infty)$ , natomiast funkcja  $\sinh x$  jest ściśle rosnąca.  
 (b) Wyznacz funkcję odwrotną do  $\cosh x$  na  $[0, +\infty)$  i funkcję odwrotną do  $\sinh x$ .  
 (c) Udowodnij tożsamość zwaną *jedynką hiperboliczną*:  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .  
 (d) Udowodnij tożsamości:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

- (e) Udowodnij, że funkcja  $\operatorname{tgh} x$  jest rosnącą bijekcją  $\mathbb{R}$  na przedział  $(-1, 1)$  i wyznacz jej funkcję odwrotną.

2. Rozwiąż równania:

- (a)  $7^{x-5} = 9^{5-x}$ ,  
 (b)  $7^{x+1} + 7^x = 56$ ,  
 (c)  $x^{x^2-5x+6} = 1$ .  
 (d)  $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ ,  
 (e)  $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ ,  
 (f)  $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x-1}$ ,  
 (g)  $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ ,  
 (h)  $8^x(3x + 1) = 4$ ,  
 (i)  $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ ,  
 (j)  $\log_{(x+2)} 16 = 2$ ,  
 (k)  $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$ ,  
 (l)  $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$ ,  
 (m)  $x^{\ln x} = e$ ,  
 (n)  $\frac{1}{5 - 4 \log x} + \frac{4}{1 + \log x} = 3$ ,  
 (o)  $\log_4(x + 2) \cdot \log_x 2 = 1$ ,  
 (p)  $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$ ,  
 (q)  $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$ ,  
 (r)  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ ,  
 (s)  $\log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + \log_2 x))) = \frac{1}{2}$ ,  
 (t)  $x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x-1}} - \frac{1}{\sqrt{1+x+1}}}$

3. Dla danych liczb rzeczywistych  $a, b > 0$ ,  $b \neq 1$  rozwiąż równanie

$$1 + \log_b(2 \log a - x) \cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}.$$

4. Dla danej liczby  $a > 0$  rozwiąż równanie

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log(\log a) - 1) \cdot \log_x 10.$$

5. Rozwiąż nierówności

- (a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq 8$   
 (b)  $\frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729}$   
 (c)  $8^x - 2 \leq 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$   
 (d)  $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$   
 (e)  $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$   
 (f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{x+1} \geq 1$   
 (g)  $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$   
 (h)  $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$   
 (i)  $(x^2 + x + 1)^x < 1$   
 (j)  $|x|^{x^2-x-2} < 1$   
 (k)  $\log_3(x^2 - 1) < 1$   
 (l)  $\ln(x + 1) - \ln x < 2$   
 (m)  $\log_{(2x-3)} x \leq 1$   
 (n)  $\log_x(x - 1) \geq 2$   
 (o)  $\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq 1$   
 (p)  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4-x^2}$   
 (q)  $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$   
 (r)  $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} > 3$

6. Niech  $a > 1$ . Rozwiąż nierówność

$$2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a > 0.$$

7. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Niech  $a \in (0, 1)$ . Funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = a^x + (1 - a)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż nierówności  $f(x) < 1$  i  $f(x) > 1$ .

9. Wykaż, że jeśli  $x, y > 1$ , to

$$\ln x \cdot \ln y \leq \ln \sqrt{xy} \cdot \ln \frac{x+y}{2}.$$

10. Wyznacz największą wartość funkcji  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1 - x).$$