

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna II

Definicja (Potęga o wykładniku rzeczywistym). Niech $a > 0$. Z 6 zestawu wiemy, że jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $a^x = \exp(x \ln a)$. Ostatnia równość ma sens dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc definiujemy potęgę liczby a z wykładnikiem $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy *funkcją wykładniczą* o podstawie a .

Tw. 1. Jeżeli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ to

$$(i) a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ i } a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad (ii) a^{xy} = (a^x)^y, \quad (iii) a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

Tw. 2. Obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$ jest zbiór $(0, +\infty)$. Ponadto

- Jeżeli $a > 1$ to funkcja $x \rightarrow a^x$ jest ściśle rosnąca. Jeśli $x_n \rightarrow +\infty$, to $a^{x_n} \rightarrow +\infty$ i $a^{-x_n} \rightarrow 0$.
- Jeżeli $a < 1$ to funkcja $x \rightarrow a^x$ jest ściśle malejąca. Jeśli $x_n \rightarrow +\infty$, to $a^{x_n} \rightarrow 0$ i $a^{-x_n} \rightarrow +\infty$.

Definicja logarytmi. Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas funkcja $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest bijekcją, ma więc funkcję odwrotną. *Logarytmem* o podstawie a z liczby $y > 0$ nazywamy jedyną liczbę rzeczywistą x taką, że $a^x = y$. Piszemy wówczas

$$\log_a y = x.$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i zapisujemy $\log y = \log_{10} y$. Oczywiście $\ln y = \log_e y$.

Tw. 3. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

- (i) $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;
- (ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;
- (iii) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ dla $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$.

Tw. 4. Funkcja $x \rightarrow \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$, a jej obrazem jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Tw. 5. (Zmiana podstawy logarytmu) Niech $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x > 0$. Wówczas

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

1. Czy liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać liczbę wymierną?

2. Wykaż, że dla $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$, $a_i \neq 1$

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_{k-1}} a_k \cdot \log_{a_k} a_1 = 1.$$

3. Wykaż, że dla $a, b > 0$, $a \neq 1$, oraz $p \neq 0$ zachodzi równość $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.

4. Uprość wyrażenia

- (a) $\log_{3\sqrt{3}} 27$
- (b) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$
- (c) $(\sqrt{2})^{\log_2 9}$
- (d) $(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$
- (e) $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$
- (f) $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$
- (g) $\log_{16} \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{7} \cdot \log_{\frac{1}{49}} 32$
- (h) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

5. Znajdź granice ($a > 0$ i $a \neq 1$)

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_a(n+1) - \log_a n)$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^t}$, $t > 0$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n x$, $x > 0$,
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_a n}$,
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\log_a n}}$,
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+1)$.

6. Wykaż, że jeśli $0 < a < 1 < b$, to $\log_a b + \frac{1}{4} \log_b a + 1 \leq 0$.

7. Niech $a, b, c, x > 0$ i $a, b, c, abc \neq 1$. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

8. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ i $x_1 x_2 \dots x_n = a$. Udowodnij, że

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \dots + (\log_a x_n)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

9. Niech $n \geq 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$

$$\log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(a_n) + \log_{a_n}(a_1) \geq n.$$

10. Niech $n \geq 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, x > 1$

$$\log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}(x) \leq \sqrt[n]{\log_{a_1}(x) \cdot \log_{a_2}(x) \cdot \dots \cdot \log_{a_n}(x)}.$$

11. Niech $x > 0$. Udowodnij nierówność $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $a_n \neq 1$ i $a_n \rightarrow 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

13. Oblicz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$