Analiza - klasa 4a Zestaw 5. 11.10.2023

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna I

Przypomnienie: Jeśli $a > 0$ i $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, to

$$a^x = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad \text{oraz} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 0. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n = 1$.

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

(i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geqslant 1$ dla $x \geqslant 0$ i $\exp(x) \leqslant 1$ dla $x \leqslant 0$;

(ii) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;

(iv) $\exp x \geqslant 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$;

(v) funkcja exp jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \to +\infty$ to $\exp x_n \to +\infty$ i $\exp(-x_n) \to 0$.

Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Obrazem funkcji exp jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją.

Definicja. *Logarytm naturalny* liczby dodatniej $y > 0$ jest to jedyna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $\exp(x) = y$. Piszemy wówczas $\ln y = x$.

Stw. 3. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\ln(\exp x) = x$; dla każdego $x > 0$ zachodzi $\exp(\ln x) = x$, czyli $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do exp.

Stw. 4. (Własności logarytmu naturalnego)

(i) Funkcja $\ln x$ jest rosnąca;

(ii) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ dla dowolnych $x, y > 0$ i $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;

(iii) dla każdego $x > 0$ spełnione są nierówności $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$;

(iv) jeżeli $t_n > -1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $t_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln(1+t_n) = 0 = \ln 1$;

(v) jeżeli $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to x > 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$;

(vi) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to +\infty$, to $\ln x_n \to +\infty$;

(vii) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to 0$, to $\ln x_n \to -\infty$.

---

1. Wykaż, że jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty} \exp x_n = \exp x$.

2. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x+t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.

3. Udowodnij, że $\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leqslant |x|^2 \cdot e^{|x|}$.

5. Niech $q \in (0,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1-q)\exp x + q \exp y > \exp\big((1-q)x + qy\big).$$

6. Niech $a > 0$ i $x \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.

7. Niech $a > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

8. Niech $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$.

9. Niech $t_n \neq 0$, $t_n \to 0$ i $x > 0$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+t_n) - \ln x}{t_n} = \frac{1}{x}$.

10. Udowodnij, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ jest zbieżny.

11. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$.

13. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a.$$

14. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = g$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \ln \frac{1}{a_n} = g.$$