Analiza - klasa 4a Zestaw 4. 28.9.2023

Granica ciągu 6 (powtórzenie)

1. Oblicz granice ciągów

(a) $\dfrac{3n^4-10n^3-2n^2+7}{9n^4-5n^2+19n}$

(b) $\dfrac{5^{n+1}\cdot n^2-3^{n+2}\cdot n^3}{3n\cdot 5^{n+2}+2^{n+3}\cdot n^6}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{n}-3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1}-2\sqrt[3]{n}}$,

(d) $n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$,

(e) $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}-\sqrt[3]{n^3+1}$,

(f) $\sqrt[n]{7^n-3\cdot 5^n-12}$,

(g) $\dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(h) $\dbinom{2n}{n}^{-1}$

(i) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

(j) $\left(\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(k) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^n$,

(l) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$,

(m) $\sqrt[n]{\dbinom{3n}{n}}$,

(n) $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

(o) $\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n^2+1}}$,

(p) $\dfrac{1}{n!}\dbinom{2n}{n}$,

(q) $\dfrac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}$

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0=3,\ a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0=2,\ b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0=5,\ c_{n+1}=\dfrac{(c_n-2)^2}{5}$.

3. Niech $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}$, $b_1=2$, $b_{n+1}=\dfrac{2b_n+1}{b_n+1}$. Udowodnij, że

$$\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}=\inf\{b_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$.

5. Wyznacz $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^{-1}$.

6. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{k+1}}$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)^3$

(g) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{3^k}\right)$,

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^k}{2^k}\right)$.

Wskazówki: (g): $\frac{k}{3^k}<\frac{1}{2^k}$ dla dostatecznie dużych k, (h): zbadaj ciągi $(d_{2n})_n$, $(d_{2n-1})_n$ i $(\frac{d_n}{d_{n+1}})_n$.

7. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

8. Niech $x\in\mathbb{R}$. Wyznacz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\ldots+\lfloor nx\rfloor}{n^2}.$$

9. Oblicz granice (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}n!\cdot\left(e-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$.

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest zadany rekurencyjnie: $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\dfrac{a_k+1}{a_k}$.

11. P jest wielomianem unormowanym stopnia $k>0$. Oblicz granice ciągów $\sqrt[n]{P(n)}$, $\sqrt[2^n]{P(n)}$, $\sqrt[n]{P(2^n)}$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=2023$. Znajdź granicę $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.