Analiza - klasa 4a   Zestaw 3.   14.9.2023

Granica ciągu V

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{m,n>N} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki:
(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n,
(ii) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$,
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

---

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:
(a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (b) $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$, (c) $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, (d) $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.

2. Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ jest zbieżny.

3. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0,1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n|$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

4. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{i} \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n,m>N} |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

5. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

6. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

7. Niech $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Wykaż, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że ciąg $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ jest rozbieżny.

8. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leqslant 2023$. Wykaż, że ciąg $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ jest zbieżny.

9. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

10. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(p+k)!}{k!}$.

11. Dane są ciągi zbieżne $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right), \qquad b_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - a_n}{b_n - b}.$$

12. Wykaż, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

13. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n} + x_{2n+1}) = 2022, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_{2n-1} + x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}\right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

14. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$