Analiza - klasa 4a Zestaw 2. 7.9.2023

Granica ciągu IV

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do* $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \ a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \to +\infty$. Wówczas

- $\frac{1}{a_n} \to 0$,
- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny lub ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$ i $a_n b_n \to +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \geqslant a_n$ dla prawie wszystkich n, to $b_n \to +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\frac{1}{n} \cdot n$, $\frac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\frac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\frac{0}{0}$, np. $\frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\frac{\infty}{\infty}$, np. $\frac{n}{n+1}$, $\frac{2^n}{n}$, $\frac{n}{2^n}$,
- 1^∞, np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0, np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

---

1. Oblicz granice lub wykaż, że nie istnieją:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

2. **Suma nieskończonego ciągu geometrycznego.** W zależności od $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zbadaj istnienie i wyznacz granice $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$ i $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k \cdot q^{k-1}$.

3. Niech $a_n \to +\infty$, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$, $c_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ (gdy $a_k > 0$). Udowodnij, że $b_n \to +\infty$ i $c_n \to +\infty$.

4. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$.

5. Znajdź granice ciągów, jeśli istnieją:

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(b) $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n}$,

(c) $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{3^n}$,

(d) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2^n}$,

(e) $\sqrt[n!]{n}$,

(f) $\sqrt[n]{n!}$,

(g) $\sqrt[n]{(2n)! - 2n!}$,

6. Wykaż, że poniższe granice istnieją i zbadaj, czy są one równe 0 lub $+\infty$.

(a) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$,

7. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = +\infty.$$