Analiza - klasa 4a Zestaw 1. 6.9.2023

Granica ciągu III

Przypomnienie:

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest niemalejący i ograniczony z góry lub nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera*. Jest to liczba niewymierna.

Tw. 3. $e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, a dokładniej dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n\cdot n!}$, gdzie $0<\theta_n<1$ i $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 1$

---

1. Zbadaj zbieżność ciągu (x_n) zadanego przez warunki:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + \frac{3}{2}}.$$

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

2. Oblicz granicę ciągu $x_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

3. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, (b) $y_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

4. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

5. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$, (c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n+4}$.

6. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

7. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

8. Załóżmy, że $a_n\in\mathbb{R}$ i $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = g.$$

11. Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = g.$$

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = g$.

13. Oblicz granice ciągów

(a) $\frac{2023^n}{n!}$, (b) $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$, (e) $\sqrt[n]{(n-1)^3 7^n - n^8 3^{n+1}}$.

14. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

15. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach ze zbioru $\{0,1,\ldots,k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}, \qquad \text{dla } n\in\mathbb{N}.$$

Załóżmy, że w ciągu (b_n) wystepuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) sa całkowite.