Analiza - klasa 2a Zestaw 1. 4.9.2022

Liczby pierwsze

Definicja. Liczba $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jest *pierwsza* wtw. gdy dla każdej liczby całkowitej a zachodzi implikacja $a \mid p \Rightarrow a = p$ lub $a = 1$. (Równoważnie, liczby pierwsze to te liczby naturalne, które mają dokładnie dwa różne dzielniki naturalne). Czasami zbiór liczb pierwszych jest oznaczany symbolem $\mathbb{P}$.

Liczbę $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*.

Stw. 1. Liczba $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \leqslant \sqrt{n}$ i $p \mid n$.

Tw. 2. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Stw. 3. Liczby pierwsze mają następujące własności:

(i) Jeżeli $p, q \in \mathbb{P}$ i $p \neq q$, to $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$.

(ii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ i $p \nmid a$, to $\mathrm{NWD}(p, a) = 1$.

(iii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ oraz $p \mid a_1 a_2 \ldots a_k$, to $p \mid a_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(iv) Jeżeli $p, q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{P}$ i $p \mid q_1 q_2 \ldots q_k$, to $p = q_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Tw. 4. (Podstawowe twierdzenie arytmetyki) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, tzn.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$. Ponadto, przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Wniosek 5. (Postać kanoniczna liczby naturalnej) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Stw. 6. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ zapisano w postaci kanonicznej

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

gdzie $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Wówczas

(i) $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$,

(ii) $\mathrm{NWD}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$,

(iii) $\mathrm{NWW}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.

1. Sprawdź, czy liczby (a) 347, (b) 481 są pierwsze.

2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.

3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $p + 2$ i $p + 4$ też są pierwsze.

4. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $7p + q$ i $pq + 11$ też są pierwsze.

5. Liczba $p > 3$ jest pierwsza. Wykaż, że $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

6. Liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze. Wykaż, że liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych złożonych.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że każda liczba postaci (a) $4 \cdot 2^{2^n} + 1$, (b) $5 \cdot 3^{3^n} - 2$ jest złożona.

9. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczba $2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że n jest potęgą dwójki.

10. **Liczby Fermata.** Dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ niech $F_n = 2^{2^n} + 1$. Udowodnij wzór $F_{n+1} = F_0 F_1 \ldots F_n + 2$ i wywnioskuj stąd, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 4$. Udowodnij, że n jest liczbą złożoną wtedy i tylko wtedy, gdy $n \mid (n - 1)!$.

12. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele.

13. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest różnicą dwóch liczb naturalnych mających tyle samo dzielników pierwszych.

14. Liczba p jest pierwsza. Udowodnij, że liczby $2^p + 3^p$ nie można przedstawić w postaci a^m, gdzie $a, m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$.

15. Liczba $p > 2$ jest pierwsza, $a \in \mathbb{N}$ i $p \mid a + 1$. Udowodnij, że $p^{n+1} \mid a^{p^n} + 1$ dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n.

16. Udowodnij, że liczba $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, p - 1$.

17. Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(a, b, c) \neq abc$.

18. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(ab, bc, ca) = abc.$$

19. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a^{2k-1} \mid b^{2k}$ oraz $b^{2k} \mid a^{2k+1}$. Udowodnij, że $a = b$.

20. Liczby p, q, r są pierwsze, $n \in \mathbb{N}$, oraz $p^n + q^n = r^2$. Udowodnij, że $n = 1$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 2. 14.2.2022

Małe twierdzenie Fermata

Stw. 1. Niech $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Wówczas $\mathrm{NWD}(a, m) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita b taka, że $ab \equiv 1 \pmod{m}$. Ponadto, w zbiorze $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ jest tylko jedna taka liczba b. (Liczbę b nazywamy *odwrotnością liczby a modulo m.*)

Małe tw. Fermata. Liczba p jest pierwsza, a jest liczbą naturalną. Wówczas

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

oraz, jeśli $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$, to

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Definicja. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$ *Rzędem liczby a modulo n* nazywamy liczbę

$$\mathrm{ord}_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

Z małego tw. Fermata wynika, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $\mathrm{ord}_n(a)$ jest dobrze zdefiniowaną liczbą.

---

1. Wyznacz (a) odwrotność 7 modulo 5, (b) odwrotność 10 modulo 13.

2. Liczba p jest pierwsza i $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1} \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ to odwrotności liczb $1, 2, \ldots, p-1$ modulo p. Wykaż, że liczby $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$ są różne.

3. Wyznacz resztę z dzielenia (a) 2^{168} przez 19, (b) 42^{91} przez 23.

4. Wykaż, że $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$. *Uwaga:* $341 = 11 \cdot 31$.

5. Liczba p jest pierwsza, natomiast liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są całkowite. Udowodnij, że $p \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$.

6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p \mid 2^p + 1$.

7. Dana jest liczba pierwsza $p > 5$. Udowodnij, że liczba $11\ldots1$ ($p-1$ jedynek) jest podzielna przez p.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna n taka, że

$$2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

10. Liczba p jest pierwsza, natomiast a i b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że jeśli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

11. Niech $a \in \mathbb{N}$ i liczba pierwsza $p > 2$ jest dzielnikiem liczby $a^2 + 1$. Udowodnij, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.

12. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.

13. Liczba p jest pierwsza, $a, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $\mathrm{ord}_n(a) \mid m$.

14. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a, n) > 1$. Udowodnij, że $a^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

15. Liczba p jest pierwsza, $a, m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv a^n \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $a^{\mathrm{NWD}(m,n)} \equiv 1 \pmod{p}$.

16. Niech $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{2^k}$.

17. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $p > 2$ jest liczbą pierwszą taką, że $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$. Udowodnij, że $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 3. 21.9.2022

Twierdzenia Eulera i Wilsona

Funkcja Eulera φ**.** Niech $\varphi(n)$ oznacza liczbę naturalnych nie większych od n i względnie pierwszych z n.

Lemat 1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$, $c \in \mathbb{Z}$ i $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Dla $k \in A_n$ niech r_k oznacza resztę z dzielenia liczby $km + c$ przez n. Wówczas $\{r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\} = A_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \not\equiv x_j \pmod n$ dla $i \neq j$ jest nazywany *pełnym układem reszt* modulo n

Tw. 1. Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$, to $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Tw. 2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to wszystkie dzielniki pierwsze liczby n. Wówczas

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Lemat 2. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a,n) = 1$ i

$$R_n = \{r \in \mathbb{N} : r \leqslant n \text{ i } \mathrm{NWD}(r,n) = 1\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\},$$

gdzie $1 = r_1 < r_x < \ldots < r_{\varphi(n)} < n$. Dla każdej z liczb r_k niech s_k oznacza resztę z dzielenia liczby $a \cdot r_k$ przez n. Wówczas $\{s_1, s_2, \ldots, s_{\varphi(n)}\} = R_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)})$, gdzie $x_i \not\equiv x_j \pmod n$ dla $i \neq j$ oraz $x_i \equiv r \pmod n$ dla pewnego $r \in R_n$ dla każdego i, nazywany jest *zredukowanym układem reszt* modulo n.

Tw. Eulera. Jeżeli $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a,n) = 1$, to

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

Tw. Wilsona. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

---

1. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ liczba $\varphi(n)$ jest nieparzysta?
2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że (a) $\varphi(n) = 10$, (b) $\varphi(n) = 14$.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje skończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $\varphi(n) = m$.
4. Dla jakich liczb naturalnych n spełniona jest równość $\varphi(n) = \varphi(2n)$?
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $\varphi(2n) = n$.
6. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(m,n) > 1$. Udowodnij, że $\varphi(m \cdot n) > \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
7. Niech $d, n \in \mathbb{N}$ i $d \mid n$. Wykaż, że $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.
8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość
$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$
(suma przebiega wszystkie dzielniki naturalne liczby n)
9. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 2021^{2021} przez 66.
10. Znajdź dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczby 33^{1492}.
11. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 3^{2^n} przez 2^n.
12. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 5$ spełniona jest kongruencja $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$
13. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze. Pokaż, że istnieją $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że
$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}.$$
14. Liczba naturalna n jest nieparzysta. Udowodnij, że
$$n \mid (2^2 - 1)(2^3 - 1) \ldots (2^{n-1} - 1).$$
15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej parzystej n
$$n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1.$$
16. Udowodnij, że $n \nmid 2^n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.
17. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że
$$n \mid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$$
wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.
18. Liczba $p > 2$ jest pierwsza. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $(p-1)!$ przez $p(p-1)$.
19. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $\mathrm{NWD}(a,n) = 1$. Udowodnij, że
$$a^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 \pmod n$$
wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
20. Liczba $p > 2$ jest pierwsza i $n < p$ jest liczbą naturalną. Udowodnij, że $(n-1)! \cdot (p-n)! \equiv (-1)^n \pmod p$.

Powtórzenie

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^4 + 4$ ma tylko jeden dzielnik pierwszy.

2. Niech $k > 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to pierwsze k liczb pierwszych i $m = p_1 p_2 \ldots p_k$. Udowodnij, że liczby $m - 1$ i $m + 1$ nie są kwadratami.

3. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 9^{7777}.

4. Niech $k \in \mathbb{N}$. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $2^{2^{6k+2}}$ przez 19.

5. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończnenie wiele.

6. Liczby p i q są pierwsze oraz $p > q$. Udowodnij, że

$$pq \mid (p+1)^q + (q-1)^p - p - q.$$

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że każdy większy od 1 nieparzysty dzielnik liczby

$$2021^{2^n} + 1$$

jest większy od 2^{n+1}.

8. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\begin{aligned} &\mathrm{NWW}(a,b,c)^2 \cdot \mathrm{NWD}(a,b) \cdot \mathrm{NWD}(b,c) \cdot \mathrm{NWD}(c,a) = \\ &\qquad = \mathrm{NWD}(a,b,c)^2 \cdot \mathrm{NWW}(a,b) \cdot \mathrm{NWW}(b,c) \cdot \mathrm{NWW}(c,a). \end{aligned}$$

9. Liczba p jest pierwsza, $a, b \in \mathbb{N}$ i $p \nmid ab$. Udowodnij, że

$$p^2 \mid (ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1.$$

10. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) takie, że

$$pq \mid 2^p + 2^q.$$

11. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a, n > 1$. Udowodnij, że $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 6$. Udowodnij, że $\varphi(n) \geqslant \sqrt{n}$.

13. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\tau(n)$ oznacza liczbę wszystkich dzielników naturalnych liczby n. Udowodnij, że

$$\varphi(n) + \tau(n) \leqslant n + 1.$$

Dla jakich n zachodzi równość?

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna n, której suma cyfr dziesiętnych wynosi s i taka, że $s \mid n$.

15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $3^n - 2^n$ nie jest podzielna przez n

16. Udowodnij, że wśród liczb postaci $2^n - 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele liczb parami względnie pierwszych.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\mathrm{NWD}(n! + 1, (n+1)!)$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 5. 26.10.2022

Wprowadzenie do funkcji

Definicje. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli taką funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f : X \to Y$.

- Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością* funkcji f dla *argumentu* x
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, a zbiór Y *przeciwdziedziną* funkcji f.
- Dla podzbioru $U \subset X$ *obrazem* zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór
$$f(U) = \{f(x) \in Y : x \in U\}.$$
Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji* f.
- Funkcję f taką, że dla dowolnych $u, v \in X$ zachodzi $f(u) = f(v)$ nazywamy funkcją *stałą*.
- Funkcję $f : X \to X$ taką, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = x$ nazywamy *identycznością* na zbiorze X.
- Dwie funkcje $f, g : X \to Y$ są równe, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = g(x)$. Możemy wówczas napisać $f = g$.
- Powiemy, że funkcja f jest *różnowartościowa* (1 - 1), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ czyli
$$\forall_{x_1,x_2\in X}\ f(x_1) = f(x_2) \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2.$$
Piszemy wówczas $f : X \overset{1-1}{\to} Y$. Funkcje różnowartościowe są też nazywane *injekcjami.*
- Powiemy, że funkcja f jest *na*, jeżeli każdy element Y jest wartością funkcji f, czyli
$$\forall_{y\in Y}\exists_{x\in X}\ y = f(x).$$
Piszemy wówczas $f : X \overset{\text{na}}{\to} Y$. Funkcje „na” są nazywane są *surjekcjami.*
- Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i „na” nazywamy *bijekcją* lub funkcją *wzajemnie jednoznaczną* i piszemy $f : X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$.

Złożenie funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ jest to funkcja $g \circ f : X \to Z$, której wartość dla elementu $x \in X$ jest zdefiniowana jako
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
Składanie funkcji jest łączne, tzn. jeśli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definicja. Funkcja $g : Y \to X$ jest *funkcją odwrotną* do funkcji $f : X \to Y$, jeżeli $g \circ f$ jest identycznością na zbiorze X i $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze Y. Funkcję g oznaczamy wówczas f^{-1}.

Twierdzenie. Funkcja $f : X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

---

1. Wyznacz obrazy funkcji:

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n + 3$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 7$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2| - 2$.
(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$,

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Czy funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt[k]{n + 1} - \sqrt[k]{n}$, jest różnowartościowa?

3. Podaj przykłady funkcji (a) $f : \mathbb{Z} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N}$, (b) $g : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{Z}$.

4. Podaj przykład funkcji przekształcającej zbiór $\mathbb{N}$ **na** zbiór liczb wymiernych dodatnich.

5. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest równość $f(f(n)) = f(n) + 1$ oraz $1 \in f(\mathbb{N})$.

7. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia warunek: jeżeli $m - n$ jest liczbą pierwszą, to $f(m) \neq f(n)$ Czy zbiór wartości funkcji f może być skończony? Jeżeli tak, to wyznacz najmniejszą możliwą liczbę jego elementów.

8. Niech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Każdą funkcję wzajemnie jednoznaczną $f : A_n \to A_n$ nazywamy *permutacją* zbioru n-elementowego A_n.
- Permutację f taką, że dla pewnych różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A_n$ zachodzi $f(a_i) = a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k - 1)$, $f(a_k) = f(a_1)$ i $f(x) = x$ dla $x \neq a_i$, nazywamy *cyklem* długości k i zapisujemy $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Cykl długości 2 nazywamy *transpozycją.*
- Mówimy, że cykle $(a_1, \ldots, a_k)$ i $(b_1, \ldots, b_l)$ są rozłączne, jeśli $\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_l\} = \emptyset$.

(i) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby parami rozłącznych cykli.

(ii) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.

(iii) Permutację f zapisano jako złożenie p transpozycji i jako złożenie q transpozycji. Udowodnij, że $p \equiv q \pmod 2$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 6. 8.11.2022

Funkcje liczbowe I

Definicja. *Funkcja liczbowa* jest to dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Często funkcja liczbowa jest podana samym wzorem bez wskazania dziedziny. Wówczas przyjmujemy, że dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór definiujący funkcję ma sens. Na przykład

- dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $D_f = [-1, +\infty)$,
- dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Jeżeli chcemy napisać, że mamy do czynienia z funkcją zmiennej x bez oznaczania jej literą f, g itp., możemy użyć notacji z symobolem $\mapsto$, np. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Funkcje liczbowe $f, g : D \to \mathbb{R}$ (określone na tym samym zbiorze D) można dodawać, odejmować i mnożyć. Tak otrzymane funkcje oznaczamy $f+g$, $f-g$, fg. Jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to można rozważać iloraz funkcji $\frac{g}{f}$.

Funkcje można również definiować za pomocą kilku wzorów, rozbijając jej dziedzinę na kilka rozłącznych podzbiorów. Na przykład funkcję zwaną *wartością bezwzględną* lub *modułem* $f(x) = |x|$ można zdefiniować w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Inne przykłady to funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

oraz *funkcja Dirichleta*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Definicja. Dla $D \subset \mathbb{R}$ takiego, że $x \in D \iff -x \in D$ funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, jeśli $f(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i *nieparzystą*, jeśli $f(x) = -f(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Definicja. *Wykresem* funkcji liczbowej $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D\}$.

---

1. Wyznacz dziedziny funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-7}{(x^2-2)(x+1)(x^2+2)}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$,

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{4+x}}$.

2. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji $f(x) + a$, $f(x+a)$, $af(x)$, $f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$, (b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, (c) $f(x) = \big||x-2| - 2\big| - 2$.

4. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i funkcji nieparzystej. Czy takie przedstawienie funkcji f jest tylko jedno?

5. Co można powiedzieć o (nie)parzystości funkcji $f+g$, fg, $f \circ g$ w zależności od (nie)parzystości funkcji f i g?

6. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x \cdot \dfrac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}$

7. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

8. Funkcja $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$ spełnia warunek $f \circ f(x) = x$ dla każdego $x \neq -\frac{3}{2}$. Wyznacz współczynnik c.

9. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Oblicz sumę $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{j}{k}\right)$.

10. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ spełniona jest równość $f(x) + f(y) = f(x+y)$.

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(m+n) = f(m)f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $f(f(k)) = f(k)^2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

(a) $f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$,

(b) $f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$,

(c) $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$

(d) $f(x+y) + xy = f(x)f(y)$.

(e) $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$,

(f) $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$

14. Funkcja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ spełnia równość $f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$ dla dowolnych $x, y \in (0, +\infty)$. Udowodnij, że f jest injekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełania równość $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest surjekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

16. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność $f(n+1) > f \circ f(n)$. Udowodnij, ze $f(n) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 7. 22.11.2022

Funkcje liczbowe II

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przykłady: funkcja $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ jest rosnąca, funkcja $x \mapsto= -x - x^3$ jest malejąca.

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min\limits_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max\limits_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksiumum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minumum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*
Minumum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym.*

Przykłady:

- funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $a = 0$ minimum globalne i lokalne. Funkcja ta nie ma maksimów lokalnych.
- funkcja $g(x) = 1 - |x + 1|$ ma w punkcie $a = -1$ maksimum globalne i lokalne.
- funkcja $h(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ nie ma ekstremów lokalnych i globalnych

Raczej oczywisty fakt. Niech $a < c < b$ i $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

- Jeżeli funkcja f jest niemalejąca na przedziale $(a, c]$ i nierosnąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c maksimum lokalne.
- Jeżeli funkcja f jest nierosnąca na przedziale $(a, c]$ i niemalejąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c minimum lokalne.

Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry*, jeżeli istnieje $A \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) < A$ dla każdego $x \in D$ i *ograniczona z dołu*, jeżeli istnieje $B \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) > B$ dla każdego $x \in D$. Funkcja f jest *ograniczona*, jeżeli f jest ograniczona z góry i z dołu.

---

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ jest rosnąca. Wyznacz funkcję f^{-1}.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \big||x - 2| - 2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

3. Funkcje $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ są rosnące. Czy jest prawdą, że funkcje

$$g(x) = \min(f(x), g(x)), \qquad h(x) = \max(f(x), g(x))$$

również są rosnące?

4. Funkcja $f : D \to E$ jest bijekcją i jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.

5. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?

6. Niech $a < b$. Wykaż, że każda funkcja monotoniczna $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona. Podaj przykład funkcji montonicznej $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, która jest nieograniczona z góry i z dołu.

7. **Funkcja Riemanna.** Funkcja Riemanna $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowano w następujący sposób: $r(x) = 0$ dla x niewymiernych i $x = 0$, oraz $r(\frac{m}{n}) = n$ dla $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Pokaż, że funkcja r jest nieograniczona na każdym przedziale (a, b).

8. Podaj przykład funkcji ograniczonej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takiej, że na żadnym przedziale $[a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$, f nie przyjmuje wartości największej i najmniejszej.

9. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest rosnąca i spełnia dla każdej liczby naturalnej n równość

$$f\big(f(n)\big) = 3n.$$

Oblicz $f(999)$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 8. 23.11.2022

Zadania powtórzeniowe

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}}}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

(c) $f(x) = \sqrt{x+\dfrac{1}{x}-2}$

2. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje permutacja f zbioru $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$ taka, że dla każdej liczby $k \in A_n$

$$f(k) \neq k \qquad \text{i} \qquad f(f(k)) = k?$$

3. Zbadaj, czy poniższe funkcje są parzyste lub nieparzyste:

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\cdot|x| \qquad x \mapsto \frac{x^2+|x|}{x^4-16} \qquad x \mapsto \frac{x\cdot|x|}{x^3+x}$$

$$x \mapsto \frac{|x-10|}{x+5}+\frac{|x+10|}{x-5} \qquad x \mapsto (1+x)^n+(1-x)^n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

4. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(xy)$. Udowodnij, że f jest funkcją parzystą lub nieparzystą.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

(a) $f(x) = |x+1|-|x-1|$, $x\in\mathbb{R}$

(b) $f(x) = |4-5x|+|1-3x|+2x+4$, $x\in\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \big||2x-1|+2\big|$, $x\in\mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

6. Wykaż, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ jest ściśle monotoniczna, wyznacz jej obraz i wyznacz funkcję $f^{-1}: f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$.

7. Wykaż, że funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

jest różnowartościowa, jej obrazem jest przedział $[0,\frac{1}{2})$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.

Wskazówka: Jeżeli funkcja ma funkcję odwrotną, to jest bijekcją.

8. Wyznacz największą liczbę rzeczywistą a taką, że funkcja

$$f(x) = x^2+x+1$$

jest różnowartościowa na przedziale $[a,+\infty)$ i wyznacz funkcję odwrotną $f^{-1}: f([a,+\infty))\to\mathbb{R}$.

9. Wykaż, że dla dowolnych $a,b,c\in\mathbb{R}$ wykres funkcji $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ ma środek symetrii.

10. Znajdź wszystkie funkcje $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x\neq 1$ spełniona jest równość $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

11. Wyznacz wszystkie (a) injekcje, (b) surjekcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $f(f(x)+y) = f(x+y)+1$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f(x-f(y)) = 1-x-y$$

dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$.

13. Podaj przykład bijekcji $f:[0,1]\to[0,1]$, która nie jest funkcją monotoniczną na żadnym przedziale $[a,b]\subset[0,1]$.

Wskazówka: Zdefiniuj f oddzielnie dla liczb wymiernych i niewymiernych.

Analiza - klasa 2a Zestaw 9. 1.12.2022

Wartość bezwzględna

Njważniejsze własności wartości bezwzględnej.

(i) $|x| \geqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leqslant a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leqslant x \leqslant a$.

(iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geqslant a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

(iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $|xy| = |x| \cdot |y|$ oraz gdy $y \neq 0$ to $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ oraz $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

---

1. Rozwiąż równania:

(a) $|x+2| = 2(3-x)$

(b) $|x| - |x-2| = 2$

(c) $|x-3| + |x+4| = 9$

(d) $2|x| + |x-1| + |x+1| = 4$

(e) $|2x| + 3x - 5 = |x-1|$

(f) $\big||x+1| - 2\big| = 1$

(g) $\big||x+2| - |x|\big| = 2$

(h) $\big||x+1| - |x-1|\big| = 3$

2. Rozwiąż nierówności:

(a) $|5-2x| < 1$

(b) $|2-x| < 1-2x$

(c) $|3x-4| \geqslant 7$

(d) $|x-2| \leqslant |x+4|$

(e) $|x+2| - |x| > 1$

(f) $|2x+6| + |3x-12| + |x| < 20$

(g) $\big||x+3| - 2\big| \leqslant 1$

(h) $\big||x+3| - 2\big| > 3$

3. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

(a) $\big||x| - 3\big| = m$ (b) $\big||x| - m\big| = 1$ (c) $\big||x-m| - 3\big| = 1$

4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\frac{|x+y|}{|x|+|y|} + \frac{|y+z|}{|y|+|z|} + \frac{|z+x|}{|z|+|x|}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-100|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że

$$|x-y| < |1-xy|.$$

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leqslant |y+z-x| + |z+x-y| + |x+y-z|.$$

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqslant |x+y| + |y+z| + |z+x|.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

10. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ niech $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$. Udowodnij, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$, to

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

11. Udowodnij, że dla dowlnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}.$$

12. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

13. Rozwiąż równanie

$$2\Big|x - \big|x + |x-1|\big|\Big| = \Big|x + \big|x - |x+1|\big|\Big|.$$

14. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

15. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0,1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|.$$

Część całkowita

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x\rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x. Można także spotkać oznaczenie $[x]$.

Stw. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą i k jest liczbą całkowitą, to $\lfloor x\rfloor = k$ wtw. gdy $k \leqslant x < k+1$.

Najważniejsze własności części całkowitej:

(i) Jeśli $x < y$, to $\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor y\rfloor$ (czyli funkcja $f(x) = \lfloor x\rfloor$ jest niemalejąca).

(ii) $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$.

(iv) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

(vi) Jeśli $x, y \geqslant 0$, to $\lfloor x\rfloor \cdot \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor xy\rfloor$.

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x\rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Zachodzi równość $\lceil x\rceil = -\lfloor -x\rfloor$.

Część ułamkowa liczby rzeczywistej x jest to liczba $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$

---

1. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor\,.$$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$.

3. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor$. Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2023$.

4. Rozwiąż równania

(a) $\lfloor x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor = 17$,

(b) $\left\lfloor \frac{5+6x}{8}\right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$,

(c) $\left\lfloor \frac{12x-5}{7}\right\rfloor = \frac{7x-6}{4}$,

(d) $\lfloor x-1\rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{2}\right\rfloor$,

(e) $\lfloor x \cdot \lfloor x\rfloor\rfloor = 1$,

(f) $\lfloor (x+1)^2\rfloor = \lfloor x^2\rfloor + 1$.

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5}\right\rfloor.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor\,.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x\rfloor + \lfloor 3y\rfloor + \lfloor 3z\rfloor \geqslant 2\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor z\rfloor\right) + \lfloor x+y+z\rfloor\,.$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2}\right\rfloor\,.$$

9. Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij *tożsamość Hermite'a*:

$$\lfloor nx\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n}\right\rfloor.$$

10. Niech $x \in \mathbb{R}$. Oblicz sumę $\sum\limits_{0 \leqslant k < l \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+k}{l}\right\rfloor$.

11. Dane są względnie pierwsze liczby naturalne p, q. Udowodnij, że

$$\left\lfloor \frac{p}{q}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q}\right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

12. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x > 1$ takie, że liczba $\sqrt[n]{\lfloor x\rfloor^n}$ jest całkowita dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

13. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są naturalne. Udowodnij nierówność

$$\left\lfloor \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\rfloor + n \leqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

14. Niech $x \geqslant 0$. Udowodnij równość $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = \lfloor \sqrt{x}\rfloor$.

15. Wykaż, że jest nieskończenie wiele liczb wymiernych dodatnich q takich, że $\{q^2\} + \{q\} = 0{,}99$ i nie istnieje liczba wymierna dodatnia q taka, że $\{q^2\} + \{q\} = 1$.

16. Udowodnij, że $\sum\limits_{k=1}^{n^2} \left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$ dla każdej liczby naturalnej n

17. Liczby a, b są dodatnie, niewymierne i $a + b = 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na\rfloor + \lfloor nb\rfloor = n - 1.$$

18. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na\rfloor + \lfloor nb\rfloor = \lfloor nc\rfloor\,.$$

Udowodnij, że $a + b = c$.

Funkcja kwadratowa I

Funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym, funkcją kwadratową, lub wielomianem stopnia 2 (zmiennej x).

Tw. 1. Postać kanoniczna i wyróżnik funkcji kwadratowej. Każdą funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac,$$

zwaną *postacią kanoniczną*. We wzorze powyżej liczba Δ jest nazywana *wyróżnikiem* funkcji kwadratowej f.

Tw. 2. (przebieg zmienności funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2+bx+c$, gdzie $a > 0$, jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje maksimum lokalne.

Tw. 3. Pierwiastki funkcji kwadratowej. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) ma dwa rózne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, jeżeli $\Delta > 0$, i wówczas

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1, jeżeli $\Delta = 0$, i wówczas $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\Delta < 0$.

Tw. 4. Wzory Viete'a. Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczby x_1 i x_2 są (wszystkimi) pierwiastkami funkcji f.

(ii) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (*Wzory Viete'a*).

(iii) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (*postać iloczynowa* funkcji kwadratowej).

1. Sprowadź trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej, znajdź ich pierwiastki, wyznacz ich przedziały monotoniczności i określ ich wartość najmniejszą lub największą:
(a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$, (b) $-\sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}$, (c) $x^2 + x - 8$,

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość trójmianu kwadratowego na podanych przedziałach:

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, na $[-4, 4]$ i $[1, 5]$.
(b) $g(x) = -2x^2 + 11x - 5$, na $[0, 5]$ i $[-1, 1]$.

3. Rozwiąż równania

(a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$,
(b) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$,
(c) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,
(d) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$
(e) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4}$.

4. Dla danych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}.$$

5. Niech $a, b, c > 0$. Czy jest możliwe, że każdy z trójmianów

$$ax^2 + bx + c, \quad cx^2 + ax + b, \quad bx^2 + cx + a$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

6. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i załóżmy, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiazań rzeczywistych. Pokaż, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

7. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ f(n) \in \mathbb{Z}$,
(ii) liczby $f(-1)$, $f(0)$ i $f(1)$ są całkowite,
(iii) liczby $2a$, $a + b$ i c są całkowite.

8. Korzystając ze wzorów Viete'a, wyznacz (w pamięci) pierwiastki trójmianów

$$x^2 - 5x - 6, \quad x^2 - 6x + 8, \quad x^2 + 2x - 3, \quad 2x^2 + x - 1,$$
$$x^2 + 10x + 21, \quad 6x^2 - 5x - 1, \quad x^2 + x - 56, \quad 8x^2 + 2x - 3.$$

9. Rozwiąż równanie $x^2 + x = 1111111122222222$.

10. Liczby p i q są pierwiastkami trójmianu $x^2 + px + q$. Znajdź p i q.

11. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + ax + bc$, liczby x_2, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + ac$, przy czym $ac \neq bc$. Udowodnij, że liczby x_1, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + cx + ab$.

12. Pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest pierwsza.

Analiza - klasa 2a Zestaw 12. 24.1.2023

Funkcja kwadratowa 2

1. Dla danych liczb rzeczywistych a, b takich, że $\frac{|b|}{2} < |a| < 2|b|$, rozważamy funkcję $f(x) = \left(x^2 - ax + b^2\right) \cdot \left(x^2 + bx + a^2\right)$. Dla jakich wartości a, b

$$\min f = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)?$$

2. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ równanie $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ ma więcej niż 3 rozwiązania?

3. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + x + 1) + 1.$$

4. Wyprowadź wzór na odległość punktu na płaszczyźnie o współrzędnych (p, q) od prostej o równaniu $y = ax + b$.

5. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3(x^3 + 1)(x^3 + 2)(x^3 + 3)$.

6. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków trójmianu $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ jest minimalna?

7. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 - 6x + 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $x_1^n + x_2^n$ jest całkowita i nie jest podzielna przez 5.

8. Niech $P(x) = x^2 + bx + c$ i załóżmy, że równania $P(x) = 0$ i $P(P(P(x))) = 0$ mają wspólne rozwiązanie. Udowodnij, że $P(0)P(1) = 0$.

9. Wyznacz wszystkie nieujemne rozwiązania równania $\lfloor x^2 \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor = 3$.

10. Niech $f(x) = ax^2$. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje punkt P i prosta k takie, że każdy punkt wykresu funkcji f jest równoodległy od punktu P i prostej k.

Punkt P nazywamy *ogniskiem* paraboli o równaniu $y = ax^2$, prostą k nazywamy *kierownicą* tej paraboli

11. Wyznacz równanie paraboli postaci $F(x, y) = 0$, której ogniskiem jest punkt $P = (1, 1)$, a kierownica k ma równanie $x + y + 1 = 0$.

12. Dane są dwie parabole o równaniach

$$y = a(x - b)^2 \qquad \text{oraz} \qquad y = c(x - d)^2.$$

Wykaż, że jeżeli ognisko pierwszej paraboli leży na drugiej paraboli, to ognisko drugiej paraboli leży na pierwszej paraboli.

13. Drut o długości 8 metrów należy podzielić na dwie cześci i z jednej zrobić kwadrat, a z drugiej trójkąt równoboczny. Jak to zrobić, aby suma pól tych figur była najmniejsza?

14. Znajdź pole i długości boków największego prostokąta zawartego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b, którego boki są równoległe do tych przyprostokątnych.

15. Pierwszy uczeń rozwiązał 60 równań kwadratowych w czasie o 3 godziny krótszym niż drugi. Ile czasu potrzebuje drugi na rozwiązanie 90 równań, jeżeli razem rozwiązują w ciągu godziny 30 równań. (Zakładamy, że uczeń potrzebuje tyle samo czasu na rozwiązanie każdego równania.)

16. Dwie rury otwarte jednocześnie napełniają w ciągu godziny $3/4$ basenu. Napełnienie basenu do $1/4$ objętości tylko przy pomocy pierwszej rury, a następnie dopełnienie tylko przy pomocy drugiej rury do objętości $3/4$ basenu zajmuje $2,5$ godziny. Jeśli otworzyć pierwszą rurę na godzinę, a drugą na pół godziny, to napełni się ponad połowa basenu. W ciągu ilu godzin napełni basen każda z rur osobno?

17. Woda wpływa do zbiornika przez kran, zaś wypływa przez odpływ. Gdy otwarty jest kran i odpływ, pusty zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. Napełnianie zbiornika trwa o godzinę krócej od opróżniania. Ile czasu potrzeba na napełnienie pustego zbiornika z zamkniętym odpływem wodą? Ile czasu trwa opróżnienie zbiornika z zamkniętym kranem?

18. Liczby rzeczywiste x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$. Udowodnij, że $|x_1|, |x_2| \leqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c \geqslant 0$, $a - b + c \geqslant 0$ i $a - c \geqslant 0$.

19. Trójmiany kwadratowe $P(x)$ i $Q(x)$ mają całkowite współczynniki i wspólny pierwiastek niewymierny. Udowodnij, że $P(x) = \lambda Q(x)$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 13. 25.1.2023

Powtórzenie

---

1. Rozwiąż równania

(a) $|x-1|+|x|+|x+1|=x+2$,

(b) $|x-1|+|x-4|=2$,

(c) $\big||x-3|-2\big|=1$.

2. Dla jakich wartości $a\in\mathbb{R}$ równanie $(x-1)^2=|x-a|$ ma dokładnie 3 rozwiązania?

3. Rozwiąż nierówności

4. (a) $|x-2|+|x+1|\geqslant 3x-3$,

(b) $\big||x-3|-5\big|\leqslant 2$,

(c) $x^2-10x+|x-5|\geqslant 0$.

5. Załóżmy, że $-1\leqslant x,y,z\leqslant 1$. Udowodnij, że

$$2|xy+yz+zx|\leqslant |x+y|+|y+z|+|z+x|.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x,y,z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x+2y|}{|y-z|}+\frac{|y+2z|}{|z-x|}+\frac{|z+2x|}{|x-y|}\geqslant 1.$$

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $\left\lfloor\sqrt[n]{111}\right\rfloor$ dzieli liczbę 111.

8. Rozwiąż równania

(a) $\dfrac{19x+6}{10}=\left\lfloor\dfrac{4x+7}{3}\right\rfloor$,

(b) $\left\lfloor\dfrac{8x+19}{7}\right\rfloor=\dfrac{16(x+1)}{11}$,

(c) $\lfloor x+1\rfloor=\left\lfloor\dfrac{x-2}{2}\right\rfloor$,

(d) $x-\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\frac{1}{2}$,

(e) $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor=2006$.

9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{9n+8}\right\rfloor.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$n=\left\lfloor a\sqrt{2}\right\rfloor+\left\lfloor b\sqrt{3}\right\rfloor.$$

11. Rozwiąż równanie $2x^4-13x^3-3x^2-13x+2=0$.

12. Dla jakich $a\in\mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2-(a-2)x-a-1$ jest najmniejsza?

13. Dla danej liczby $a\in\mathbb{R}$ wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x)=(x^2+2x+2)^2-a(x^2+2x-2).$$

14. Wyznacz nieujemne rozwiązania równania $2\left\lfloor x^2\right\rfloor=1+\lfloor x\rfloor$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 14. 7.2.2023

Nierówność Cauchy'ego – Schwarza

Tw. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Ponadto, nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista x taka, że $b_k = x \cdot a_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Wniosek (Postać Engela nierówności C-S). Jeżeli $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ i $b_1, \ldots, b_n > 0$, to

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

---

1. Udowodnij, że dla liczb nieujemnych a, b zachodzi nierówność

$$(a^3 + b^3)(a + b) \geqslant (a^2 + b^2)^2.$$

2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n + a_n a_1.$$

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $|a|, |b| \leqslant 1$. Udowodnij, że $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|a^3 - b^3| \leqslant |a - b|\sqrt{(2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)}.$$

5. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c \geqslant 14$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

6. Liczby dodatnie x, y spełniają równość $x^2 + y^2 = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

7. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{a}(a - b + c) + \sqrt{b}(b - c + a) + \sqrt{c}(c - a + b) \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}.$$

8. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leqslant 6$. Udowodnij, że $|a + b + c| \leqslant \sqrt{11}$.

9. Załóżmy, że $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c + 4d \geqslant 30$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 30$.

10. Udowodnij, że dla liczb $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \cdot \sqrt{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

11. Niech $a, b > c > 0$. Udowodnij, że $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$.

12. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1)^2}{x^{2n} + x^{2n-2} + \ldots + x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

16. Za pomocą postaci Enegela udowodnij **nierówność Nesbitta**: Jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

17. Niech $x, y, z > 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{2}{x + y} + \frac{2}{y + z} + \frac{2}{z + x} \geqslant \frac{9}{x + y + z}.$$

18. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2.$$

20. Liczy a, b, c są dodatnie i $ab + bc + ca \geqslant 3$. Udowodnij nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a + b}} + \frac{b}{\sqrt{b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c + a}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Analiza - klasa 2a   Zestaw 15.   8.2.2023

Wzór Legendre'a

Definicja. Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\nu_p(n)$ oznacza największy wykładnik k taki, że $p^k \mid n$. Liczbę $\nu_p(n)$ nazywamy *wykładnikiem p-adycznym* liczby n.

Tw. (Wzórr Legendre'a) Jeżeli p jest liczbą pierwszą i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots .$$

---

1. Stosując wzór Legendre'a, udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n, k takich, że $n \geqslant k$ liczba

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jest całkowita.

2. Liczba p jest pierwsza i $m \in \mathbb{N}$. Oblicz $\nu_p((p^m)!)$.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że 2^n nie dzieli $n!$, ale 2^n dzieli $(2n)!/n!$.

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $2^{n-1} \mid n!$.

5. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez 4?

6. Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ liczby

$$\frac{(2n)! \cdot (2m)!}{n! \cdot m! \cdot (n+m)!} \qquad \text{i} \qquad \frac{(mn)!}{m! \cdot (n!)^m}$$

są całkowite.

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się dokładnie 1000 zer.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $n! = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{NWW}\left(1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 16. 28.2.2023

Kombinatoryka I

Tw. (Zadada szufladkowa). Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.

Niech A będzie zbiorem skończonym. *Moc zbioru* A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k-elementowych $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Stw. Zbiory A i B są skończone. Wówczas

- $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.
- $|A| \geqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f : A \to B$.
- $|A| \leqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje injekcja $f : A \to B$

---

1. Na przyjęciu jest $n \geqslant 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.
2. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.
3. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.
4. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ róznych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.
5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.
6. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.
7. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.
8. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.
9. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.
10. **Tw. Dirichleta.** Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p, q takie, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz
$$|xq - p| \leqslant \frac{1}{n}.$$
11. Numer dowodu osobistego jest ciągiem trzech liter alfabetu łacińskiego i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?
12. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?
13. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?
14. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?
15. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?
16. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$. Ile jest (a) funkcji, (b) injekcji $f : A \to B$.
17. Na ile sposobów można wybrać (a) podzbiór zbioru n-elementowego, (b) dwa rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?
18. Ile jest surjekcji ze zbioru 4 elementowego na zbiór 3 elementowy?
19. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że
    (a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.
    (b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a.
20. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.
21. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?
22. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?
23. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A, przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j.
24. $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ to różne podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przyjmijmy, że $A_{2n+1} = A_1$. Znajdź największą możliwą wartość sumy
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{|A_k \cap A_{k+1}|}{|A_k| \cdot |A_{k+1}|}.$$

Kombinatoryka II

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdą funkcję odwozorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o wyrazach ze zbioru A.

Tw. 1. Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdą injekcję (funkcję różnowartościową) odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o różnych wyrazach ze zbioru A.

Tw. 2. Liczba wariacji k-wyrazowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geqslant k$ i 0 jeśli $n > k$.

Permutacją zbioru n-elementowego A nazywamy każdą bijekcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór A. Każdą taką bijekcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z pewnynm ustawieniem wszystkich elementów zbioru A w ciąg długości n.

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. *Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego A* nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A.

Tw. 4. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Liczba k-elementowych kombinacji (czyli k-elementowych podzbiorów) zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n}{k}$.

---

1. Ile jest ciągów długości 4 o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 15\}$ takich, że
(a) liczba 4 jest jednym z wyrazów ciągu?
(b) pewna liczba występuje w ciągu dokładnie dwukrotnie?
(c) pewna liczba występuje w ciągu co najmniej dwukrotnie?

2. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$, jeżeli
(a) cyfry mogą się powtarzać?
(b) cyfry nie mogą się powtarzać?
(c) cyfry mogą się powtarzać i 1 musi wystąpić co najmniej raz?
(d) cyfry mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?
(e) cyfry nie mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

3. Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?

4. Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.

5. Spośród uczniów klasy 2a należy wybrać czteroosobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można wybrać czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopak?

6. Wyznacz liczbę ciągów (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$.

7. Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?

8. Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8?

9. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb jest parzysty?

10. Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?

11. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?

12. Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

13. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
(a) każdy może dzielić pokój z każdym,
(b) pewnych dwóch studentów nie chce mieszkać razem,
(c) pewnych dwóch studentów chce mieszkać razem?

14. Podaj kombinatoryczne dowody tożsamości (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (c) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ (d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

15. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamości: (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba ciągów m-wyrazowych $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ takich, że $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$ wynosi $\binom{m+n-1}{m-1}$.

17. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Filemon i Bonifacy zapisują ciągi liczb całkowitych:

- Filemon zapisuje wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takie, że $|a_1| + \ldots + |a_n| \leqslant k$.
- Bonifacy zapisuje wszystkie ciągi $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takie, że $|b_1| + \ldots + |b_k| \leqslant n$.

Udowodnij, że obaj zapiszą tyle samo ciągów.

Analiza - klasa 2a   Zestaw 18.   17.3.2023

Powótrzenie

Zakres: nierówność Cauchy'ego - Schwarza, wzór Legendre'a, kombinatoryka.

1. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+d^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$ Udowodnij, że

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \geqslant -1.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, q liczba

$$\frac{(3m)! \cdot (3n)! \cdot (3q)!}{(m!)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (q!)^2 \cdot (m+n+q)!}$$

jest całkowita.

4. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

5. Liczby a, b, c, d są całkowite. Wykaż, że iloczyn

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

jest podzielny przez 12.

6. Udowodnij, że ze zbioru 102 różnych liczb całkowitych można wybrać dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 200.

7. Każde pole tabeli o 2 wierszach i 10 kolumnach kolorujemy jednym z 10 kolorów. Ile jest pokolorowań tabeli takich, że pola w każdym wierszu są różnych kolorów?

8. Oblicz, na ile sposobów można zapisać w jednym rzędzie cyfry 0, 1, 2, ..., 9 tak, aby

(a) 0 i 1 występowały obok siebie,

(b) 0 i 1 nie występowały obok siebie,

(c) 0, 1 i 2 nie występowały obok siebie,

(d) ani 0 i 1, ani 8 i 9 nie występowały obok siebie.

9. Na ile sposobów można wybrać 4 uczniów z 2 klas liczących 28 osób tak, aby z każdej klasy został wybrany przynajmniej jeden uczeń?

10. Na ile sposobów można 28 osobową klasę podzielić na 7 - osobowe drużyny oznaczone kolorami niebieskim, zielonym, czerwonym i żółtym?

11. W turnieju tenisowym bierze udział $2n$ tenisistów. W 1. rundzie ma być rozgranych jednocześnie n pojedynków. Na ile sposobów można podzielić wszystkich tenisistów na n par przeciwników?

12. Wyznacz liczbę ciągów (a, b, c, d) takich, że $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ oraz (a) $a+b+c+d = 300$, (b) $3a + 3b + 3c + d = 300$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz liczbę ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, w których liczba 0 występuje (a) parzystą, (b) nieprarzystą ilość razy.

14. Niech $m, r \in \mathbb{N}$, $m > r$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=r}^{m} \binom{m}{k}\binom{k}{r}(-1)^k = 0.$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 19. 4.4.2023

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^m$ (gdzie $m > n$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) arytmetycznym* jeżeli istnieje liczba d taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = a_n + d$. Liczbę d nazywamy wówczas *przyrostem* lub *różnicą* ciągu (a_n).

Tw. 1. Niech $(a_n)_{n=1}^m$,gdzie $m \in \mathbb{N}$ i $m > 2$ lub $m = \infty$, będzie ciągiem liczbowym. Następujące warunki są równoważne:

(i) Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny.

(ii) Dla każdego n takiego, że $1 < n < m$ zachodzi $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

(iii) Dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Tw. 2. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem arytmetycznym z przyrostem d, to dla $k \geqslant 1$ zachodzi $a_k = a_1 + (k-1)d$ oraz $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=0}^m$ (gdzie $m \in \mathbb{N}$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) geometrycznym*, jeżeli $a_0 \neq 0$ i istnieje stała $q \neq 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = qa_n$. Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu (a_n).

Tw. Jeżeli $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem geometrycznym z ilorazem q, to dla $k \geqslant 0$ zachodzi $a_k = q^k \cdot a_0$ oraz, gdy $q \neq 1$

$$\sum_{j=0}^{k} a_k = a_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

---

1. Oblicz sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.

2. Ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg o wyrazach (a) $a_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$, (b) $b_n = x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+r}$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ jest ustalone, też jest ciągiem arytmetycznym.

3. Niech S_n oznacza sumę początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

4. W pewnej rodzinie każde z pięciorga dzieci dostaje na urodziny, począwszy od piątych, tyle książek, ile w danym dniu kończy lat. Liczby wyrażające wiek dzieci tworzą ciąg arytmetyczny o przyroście 3. Zbiór książek wszystkich dzieci składa się z 325 tomów. Ila lat ma każde z dzieci?

5. Pola kwadratowych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym pierwsza ma pole równe $12\,\mathrm{cm}^2$, a piąta $30\,\mathrm{cm}^2$. Kartki pocięto na kawałki, z których ułożono kwadrat o boku 21 cm. Ile było kartek?

6. Ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego n zachodzi $\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$.

7. Wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są liczbami naturalnymi i pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Wykaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.

8. Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ są różne od 0. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

9. Zbiór liczb naturalnych podzielono na kilka nieskończonych ciągów arytmetycznych. Wykaż, że pierwszy wyraz jednego z tych ciągów jest podzielny przez jego przyrost.

10. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny taki, że iloczyn dowolnych dwóch wyrazów tego ciągu też jest wyrazem tego ciągu. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

11. Ciąg $(a_k)_{k=0}^\infty$ jest arytmetyczny, $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0$.

12. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, natomiast ciąg $(a+1, b+1, c+4, d+13)$ jest arytmetyczny.

13. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych α, β takie, że ciąg $(1, \alpha, \beta)$ jest arytmetyczny i ciąg $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ jest geometryczny.

14. Czy istnieje ciąg (a) arytmetyczny, (b) geometryczny, którego pewne trzy wyrazy to liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?

15. **Nierówność Euklidesa.** Liczby dodatnie a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$. Udowodnij, że $a + d > b + c$.

16. Ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a + d = 10$, $ad = 7$. Oblicz $b^3 + c^3$.

17. Boki trójkąta tworzą postęp geometryczny. W jakim przedziale może się zmieniać iloraz tego postępu?

18. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

19. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest geometryczny z ilorazem q. Wyraź sumę $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$ przez a_1 i q.

20. Dany jest ciąg liczbowy $(b_n)_{n=0}^\infty$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i ciąg $(c_n)_{n=0}^\infty$ jest geometryczny i nie jest stały. Wykaż, że ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty$ też jest geometryczny.

21. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ zbiór odwrotności wszystlich liczb naturalnych zawiera wyrazy pewnego nie stałego ciągu arytmetycznego długości n. Wykaż, że zbiór ten nie zawiera wyrazów nieskończonego nie stałego ciągu arytmetycznego.

22. **Tw. Bernoulliego.** Dane są ciągi arytmetyczny $(a_n)_{n=0}^\infty$ i geometryczny $(b_n)_{n=0}^\infty$ takie, że $0 < a_0 = b_0 < a_1 = b_1$. Udowodnij, że $a_n < b_n$ dla każdego $n \geqslant 2$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 20. 13.4.2023

Ciągi rekurencyjne

Definicja. Mówimy, że ciąg liczb $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 1*, jeżeli istnieją stałe a, b takie, że $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Jeżeli $a = 0$, to ciąg $(x_n)_n$ jest stały; jeżeli $a = 1$, to jest to ciąg arytmetyczny; jeżeli $b = 0$, to geometryczny.

Tw. 1. Jeżeli $a \neq 0, 1$ i $b \neq 0$ oraz $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to

$$x_n = a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}.$$

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniający równanie rekurencyjne

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad p, q, r \in \mathbb{R}, \, q \neq 0, \, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

nazywamy *ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2*. Jeżeli dodatkowo $r = 0$, to nazywamy go *jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2*.

Tw. 2. Niech $(x_n)_n$ będzie jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 (czyli $r = 0$). Równanie $\lambda^2 = p\lambda + q$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* ciągu (x_n). Wówczas

(i) jeżeli równanie charakterystyczne ma 2 różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) jeżeli równanie charakterystyczne ma 1 pierwiastek λ_1, to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = (a + bn)\lambda_1^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

---

1. Znajdź jawny wzóry na n-ty wyraz ciągu:

(a) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$;

(b) $x_0 = -2$, $x_{n+1} = 3x_n - 2$;

(c) $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;

(d) $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$;

(e) $x_0 = 2$, $x_1 = -3$, $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$;

(f) $y_0 = 0$, $y_1 = 20$, $y_{n+2} = -2y_{n+1} + 8y_n + 10$;

(g) $u_1 = 0, u_2 = 6$, $u_{n+2} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}u_{n+1} + \dfrac{3n}{n+2}u_n$.

(h) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n + 4a_{n+1}}$.

2. Ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, spełniają zależności

$$x_{n+1} = 2y_n + 1, \quad y_{n+1} = 2x_n - 3, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Znajdź jawne wzory na x_n i y_n.

3. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $2 \times n$ płytkami o rozmiarze (a) 2×1, (b) 2×1 i 2×2?

4. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 0$ i $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2, znajdź jawny wzór na x_n i wykaż, że każdy wyraz ciągu x_n jest liczbą całkowitą.

5. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$. Wykaż, że $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 i znajdź jawny wzór na x_n.

6. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany następująco: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $2^k \mid a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid n$.

7. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że $f(0) = 0$ i $f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right)$.

8. Liczba rzeczywista $a \neq 0$ spełnia zależność $\{a\} + \{a^{-1}\} = 1$. Udowodnij, że $\{a^n\} + \{a^{-n}\} = 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

9. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu:

(a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$,

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(c) $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n + 3 \cdot 2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

10. Dla jakich wartości x_0 ciąg spełniający zależność rekurencyjną $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$ jest rosnący?

11. Permutację p zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *inwolucją*, jeżeli $p(p(k)) = k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech a_n oznacza liczbę takich inwolucji. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n.

12. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefioniowany przez warunki $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnij, że dla każdego n zachodzi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k + 1} < 1$.

13. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$ oraz $x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n$. Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

14. Udowodnij, że każdy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określonego przez warunki $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ jest liczbą całkowitą.

15. Ciąg liczb dodatnich $(x_n)_n$ spełnia równanie rekurencyjne $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$. Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą niewymierną.

16. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych $m \geqslant n$ zależność $2(a_{m+n} + a_{m-n}) = a_{2m} + a_{2n}$ oraz $a_1 = 1$. Wyznacz a_n.

17. Dany jest ciąg rekurenycjny $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = a_n + 1$, $a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnij, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu dokładnie jeden raz.

18. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Udowodnij, że $F_{2n} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

Powtórzenie – ciągi

1. Ciąg (a,b,c) jest arytmetyczny. Wykaż, że $3(a^2+b^2+c^2)=6(a-b)^2+(a+b+c)^2$.

2. Znajdź wszystkie ciągi arytmetyczne z przyrostem 6 składające się z 5 liczb pierwszych.

3. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny, którego wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?

4. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1=a$ i przyroście d. Oblicz sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$

5. Skończony ciąg arytemtyczny (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 165, a suma wyrazów o nieparzystych numerach jest równa 88. Z ilu wyrazów składa się ciąg (a_n)?

6. Niech $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ są dodatnie i ich suma jest równa S. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{a_2a_3a_4}+\ldots+\sqrt[3]{a_{n-2}a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{n-2}{n}S.$$

7. Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_k)_{k=0}^{2022}$, przy czym $0<a_0<a_1$. Rozstrzygnij, która liczba jest większa

$$(a_0+a_1)\cdot(a_1+a_2)\cdot\ldots\cdot(a_{2021}+a_{2022})\quad\text{czy}\quad(a_0+a_{2022})^{2022}.$$

8. Wyznacz liczby a,b,c,d takie, że ciąg (a,b,c,d) jest geometryczny, $a+b+c+d=130$ i $a^2+b^2+c^2+d^2=5044$.

9. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_0=a>0$ i ilorazie $q>0$. Oblicz sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k(a_k+1)$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{k+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$.

10. Dla jakich wartości x,y,z ciąg (x,y,z) jest geometryczny, a ciągi

$$(4x-4,2y-2,z-1)\quad\text{i}\quad(x+5,y+3,z-15)$$

są arytmetyczne?

11. Ciąg (a,b,c) jest geometryczny. Ciąg $(3a+3,2b,c-12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a,b,c.

12. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że istnieją ciągi arytmetyczny $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i geometryczny $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=b_nc_n.$$

13. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny, a ciąg $(b_n)_n$ jest geometryczny z ilorazem q. Udowodnij, że ciąg o wyrazach $c_n=a_nb_n$ jest ciągiem jednorodnym liniowo – rekurencyjnym rzędu 2 i wyznacz równanie rekurencyjne tego ciągu.

14. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany przez warunki:

$$a_0=\frac{1}{4},\quad a_1=\frac{1}{6},\quad\text{oraz}\quad a_{n+1}=\frac{a_na_{n+1}}{3a_n+10a_{n+1}}\quad\text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Wyznacz a_{2022} i oblicz sumę $\displaystyle\sum_{n=0}^{2022}\frac{1}{a_n}$.

15. Niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Wykaż, że ciąg

$$a_n=5F_n^2+2\cdot(-1)^n$$

jest jednorodnym ciągiem liniowo – rekurencyjnym rzędu 2.

16. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany przez warunki

$$a_1=1\quad\text{i}\quad a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2-2}\quad\text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą i wyznacz a_{2023}.

17. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki

$$a_1=\frac{3}{2},\qquad a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}\ \text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$

Udowodnij, że ciąg ten jest rosnący i $a_n<2$ dla każdego n.

18. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia warunki:

$$x_0>1\quad\text{oraz}\quad x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n}.$$

Udowodnij, że ciąg ten jest malejący i $x_n>1$ dla każdego n.

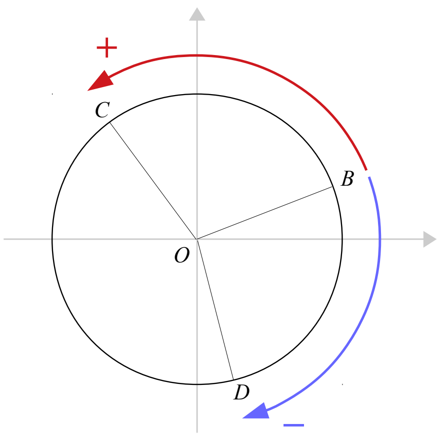
Funkcje trygonometryczne I

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$, X to pewien zbiór. Mówimy, że funkcja $f : D \to X$ jest okresowa z okresem $T > 0$, jeżeli dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x+T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Najkrótszy okres funkcji f nazywamy jej *okresem podstawowym*.

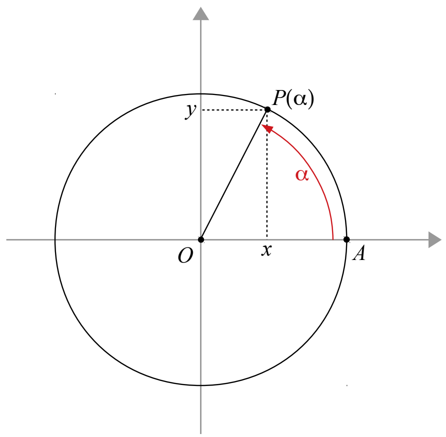
Miara kąta skierowanego

Niech S oznacza okrąg o promieniu 1 (zwany okręgiem jednostkowym), który został umieszczony w układzie współrzędnych na płaszczyźnie tak, że jego środkek znajduje w punkcie $O = (0,0)$. Na tym okręgu wybrano dwa punkty B i C. *Miarą (łukową) kąta skierowanego* $\measuredangle BOC$ określamy za pomocą długości łuku okręgu od punktu B do punktu C, przy czym:

- jeżeli od B do C idziemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to miara kąta jest dodatnia i równa długości łuku od punktu B do punktu C;
- jeżeli od B do C idziemy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to miara kąta jest ujemna i równa długości łuku od punktu B do punktu C pomnożonej przez -1.



$\measuredangle BOC > 0$ i $\measuredangle BOD < 0$



Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$

Na okręgu S ustalmy punkt $A = (1,0)$. Każdej liczbie rzeczywistej α możemy przyporządkować punkt $P(\alpha)$ na okręgu S w taki sposób, że miara łukowa kąta skierowanego $\measuredangle AOP(\alpha)$ jest równa α:

- $P(0) = A$;
- jeżeli $\alpha > 0$, to idziemy się po okręgu od punktu A w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości α, dochodząc do punktu $P(\alpha)$;
- jeżeli $\alpha < 0$, to idziemy po okręgu od punktu A w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości $-\alpha$, dochodząc do punktu $P(\alpha)$.

Fakt. Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$ jest okresowa i jej okres jest równy 2π. Ponadto, jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to funkcja $\alpha \mapsto P(\alpha)$ jest bijekcją.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy, że punkt $P(\alpha)$ ma współrzędne (x, y). Definiujemy następujące funkcje, zwane funkcjami *trygonometrycznymi*:

(i) **sinus:** $\sin\alpha = y$;

(ii) **cosinus:** $\cos\alpha = x$;

(iii) **tangens:** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $(x \neq 0)$;

(iv) **cotangens:** $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, $(y \neq 0)$.

Stw. 1 (własności sinusa). Funkcja $\sin(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ i

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest rosnąca na przedziałach $[(2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ i malejąca na przedziałach $[(2k + \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{3}{2})\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 2 (własności cosinusa). Funkcja $\cos(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;

(iii) jest parzysta;

(iv) jest malejąca na przedziałach $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ i rosnąca na przedziałach $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 3 (własności tangensa). Funkcja $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest rosnąca na przedziałach $((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 4 (własności cotangensa). Funkcja $\operatorname{ctg}(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest malejąca na przedziałach $(k\pi, (k + 1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 5 (jedynka trygonometryczna). Dla każdej liczby rzeczywistej α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Stw. 6 (wzory redukcyjne).

- $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha) = -\sin(\pi+\alpha)$
- $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\pi+\alpha)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \sin\alpha$

Najażniejsze wartości:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Stw. 7. (Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy)

- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
- $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$

Stw. 8. (Sinus i cosinus podwojonego i potrojonego kąta)

- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
- $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Stw. 9. (Zamiana sumy funkcji sinus i cosinus na iloczyn)

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Stw. 10. (Zamiana iloczynu funkcji sinus i cosinus na sumę)

- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$

Stw 11. (Wyrażenie za pomocą $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$) Dla $\alpha \neq (2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}.$$

---

1. Uzupełnij wartości w tabeli:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
stopnie												
$\sin\alpha$												
$\cos\alpha$												
$\operatorname{tg}\alpha$												
$\operatorname{ctg}\alpha$												

2. Zbadaj znaki liczb $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{9\pi}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{8}$, $\operatorname{tg}1$, $\cos(\sin 4)$, $\operatorname{tg}(\cos 1)$.

3. Porównaj pary liczb: (a) $\sin 1$ i $\cos 1$, (b) 1 i $\cos\alpha + \sin\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

4. Znajdź funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taką, że $\operatorname{ctg} = \operatorname{tg}\circ f$.

5. Uprość wyrażenia:

(a) $\sqrt{1-\cos^2 t}$, $\sqrt{1-\sin^2 t}$,

(b) $\operatorname{tg}^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

(c) $\sin^4\phi + 2\sin^2\phi\cos^2\phi + \cos^4\phi$,

(d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\gamma} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\gamma}$,

(e) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

(f) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

6. Rozwiąż równania: (a) $|\sin x| = \frac{1}{2}$, (b) $|\sin x| + |\cos x| = 1$, (c) $|\sin x| = |\cos x|$, (d) $\sin\dfrac{x}{2} = 1 + |\sin x|$, (e) $|\sin x - \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$.

7. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin^2 x + \sin x + m = 0$ ma rozwiązanie?

8. Załóżmy, że $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówności

$$\operatorname{tg}x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n} < \operatorname{tg}x_n.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej α takiej, że $|\sin\alpha| \neq 1$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

10. Dane są liczby rzeczywiste a, b i x takie, że $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} = \dfrac{1}{a+b}$.

(a) Wyraź $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ poprzez a i b.

(b) Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 23. 17.5.2023

Funkcje trygonometryczne II

1. Oblicz wartości funkcji sin i cos dla argumentów: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{-17\pi}{8}$, $\frac{19\pi}{12}$.

2. Oblicz $\cos^4\dfrac{\pi}{24} - \sin^4\dfrac{\pi}{24}$.

3. Dla danych liczb rzeczywistych a i b wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = a\sin x + b\cos x$.

4. Udowodnij, że $(1 - \operatorname{ctg}(23^\circ))(1 - \operatorname{ctg}(22^\circ)) = 2$.

5. Zamień sumę $\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$ na iloczyn.

6. Niech $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ i $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$. Wykaż, że $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1$.

7. Udowodnij nierówności:

(a) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

(b) $|\sin x| \leqslant |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;

(d) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leqslant \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ dla $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$.

(e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \geqslant \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ dla $0 \leqslant \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

8. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (dla $x \in \mathbb{R}$) jest rosnąca.

9. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = (\cos x + 1)(\sin x + 1)$.

10. Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

11. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a takie, że funkcja $f(x) = |\sin ax + \cos x|$ przyjmuje wartość 2.

12. Rozwiąż równania

(a) $2\sin^2 x + \sin x = 1$;

(b) $\cos(2x) - \cos x = 0$;

(c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

(d) $\sin(2x)\sin x = \cos x$;

(e) $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos x = 0$;

(f) $\cos x - \cos(3x) = \sin(3x) - \sin x$

(g) $\operatorname{tg} x = 2\cos\frac{x}{2}$;

(h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

(i) $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin^2(2x) = 1$;

(j) $\sin x \cdot \sin(3x) = \frac{1}{2}$;

(k) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$,

(l) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

(m) $2\cos^3 x + 3\sin^2 x = 2$

(n) $4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$

(o) $6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

13. Rozwiąż nierówności w przedziale $[0, 2\pi]$:

(a) $\cos x > \frac{1}{2}$;

(b) $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$;

(c) $\sin x > \cos x$;

(d) $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$

(e) $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) < 2$

(f) $\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{ctg}(2x) > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

(g) $\operatorname{ctg} x < 2 - \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$,

(h) $\cos 4x + 2\cos^2 x \geqslant 1$.

(i) $\sin x - \cos x \geqslant 1$.

14. Sprawdź tożsamości

(a) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$,

(b) $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{7\alpha}{2} + \cos 7\alpha = 1$,

(c) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha = 1$,

(d) $4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 + \cos^2 2\alpha$,

(e) $2\sin^4\alpha + 2\cos^4\alpha = 1 + \cos^2 2\alpha$,

(f) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$,

(g) $\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha = \cos 3\alpha\cos 2\alpha$.

15. Udowodnij tożsamości

(a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2} + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$,

(b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2} - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

16. Oblicz

(a) $\cos\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{9}$

(b) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

(c) $\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$

(d) $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7}$

(e) $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ$,

(f) $\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{3\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18}\sin\dfrac{9\pi}{18}$,

17. (a) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej α zachodzi nierówność $|\sin n\alpha| \leqslant n|\sin\alpha|$.

(b) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistych α, β zachodzi nierówność $|\cos n\alpha - \cos n\beta| \leqslant n^2|\cos\alpha - \cos\beta|$.

18. Udowodnij, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, to $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

19. Załóżmy, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ i $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Udowodnij, że $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.

20. Udowodnij, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x| \geqslant \frac{n}{2}.$$

21. Znajdź wzór na sumę $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{tg} kx\cdot\operatorname{tg}(k+1)x$.

Liczby zespolone I

Liczba zespolona jest to para uporządkowana liczb rzeczywistych (a, b). Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Na zbiorze $\mathbb{C}$ są określone działania

- *dodawanie:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, z elementem neutralnym $0 = (0, 0)$;
- *mnożenie:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, z elementem neutralnym $1 = (1, 0)$.

Stw. 1. Działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych są przemienne i łączne, oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Z tego wynika, że dla liczb zespolonych zachodzą wzory skróconego mnożenia i wzór dwumianowy Newtona.

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy symbolem i. Liczba i spełnia równość $i^2 = (-1, 0)$. Wykorzystując jednostkę urojoną i każdą liczbę zespoloną $z = (a, b)$ możemy zapisać w tzw. *postaci algebraicznej:*

$$z = a + bi.$$

Zachodzi $i^2 = -1 + 0i = -1$ (czyli i to pierwiastek kwadratowy z -1).

Stosując postać algebraiczną, każdą liczbę rzeczywistą można traktować jako liczbę zespoloną: $a = a + 0i$ dla $a \in \mathbb{R}$. Liczby zespolone postaci $(0, b) = bi$ nazywane są *liczbami urojonymi.*

Jeżeli $z = (a, b) = a + bi$ jest liczbą zespoloną, to

- liczbę rzeczywistą a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Re}z = a$.
- liczbę rzeczywistą b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Im}z = b$.
- *moduł* liczby zespolonej z jest to liczba nieujemna $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *sprzężeniem* liczby zespolonej z nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$

Odwrotnością liczby zespolonej $z = (a, b) \neq 0$ jest liczba

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}.$$

Stw. 2. Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas
(i) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}z$, (ii) $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}z$, (iii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Stw. 3. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
(iii) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ (dla $w \neq 0$)
(iv) $|zw| = |z| \cdot |w|$,
(v) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (dla $w \neq 0$).
(vi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$,
(vii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$,

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{gdzie } r = |z| > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Liczbę θ nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Dla $z \neq 0$, jeżeli $\theta \in [0, 2\pi)$, to mówimy, że θ jest *argumentem głównym* liczby z.

Stosowana jest również notacja $\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{cis}\theta = e^{i\theta}$. Pełny sens matematyczny zapisu $e^{i\theta}$ stanie się jasny kiedy indziej.

Stw. 4. Jeżeli $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ i $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r, s > 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, to

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, jeśli $z \neq 0$;
(ii) $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$;
(iii) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i\sin(\theta - \phi))$;
(iv) (**Wzóre de Moivre'a**) Dla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ zachodzi

$$z^n = r^n \cdot \big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

Tw. 5. (pierwiastki z liczby zespolonej). Niech $a = |a| \cdot \mathrm{cis}\phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie liczby zespolone w spełniające równanie $w^n = a$ są postaci

$$w_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{2k\pi + \phi}{n}\right) + +i\sin\left(\frac{2k\pi + \phi}{n}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Liczby te nazywamy *zespolonymi pierwiastkami stopnia n z liczby zespolonej a.*

Uwaga 1. Liczby w_k są wszystkie różne, więc każda liczba zespolona $a \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n.

Uwaga 2. Ze względu na niejednoznaczność pierwiastków zespolonych, dla $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **nie będziemy** stosować zapisu $\sqrt[n]{a}$ na oznaczenie którejkolwiek z liczb w_k.

Pierwiastki z jedności. Dla $a = 1$ otrzymujemy n różnych zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n:

$$u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

---

1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej:

(a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$,
(b) $\frac{(5 + i)(3 + i)}{2i}$,
(c) $\frac{1}{5 - 4i} + \frac{3}{2 + i}$
(d) $\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i}$,
(e) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$,
(f) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$,

2. Udowodnij, że

- liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \overline{z}$;
- liczba zespolona z jest liczbą urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy $z = -\overline{z}$;

3. Niech $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 + u + u^2$, $1 + \overline{u} + \overline{u}^2$.

4. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnij równoważność warunków:

(i) $|z| = 1$, (ii) $\mathrm{Re}z = \dfrac{z^2+1}{2z}$, (iii) $\mathrm{Im}z = \dfrac{z^2-1}{2iz}$.

5. Niech $a, b \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\overline{b}$ jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

6. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z| - z = 1 + 2i$,
(b) $z^2 = i$,
(c) $z^2 = 3 - 4i$,
(d) $z^2 = \overline{z}$,
(e) $z^3 = \overline{z}$,
(f) $z^2 + 2|z|^2 = 2$,
(g) $z^3 + |z|^2 + z = 0$,

7. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$;
(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leqslant 1\}$;
(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 2\}$;
(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = a\}$ dla $a = 1, 2, 3$;
(e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |\mathrm{Re}z| < 2\}$;
(f) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$;
(g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Im}z + 1\}$;
(h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$.

8. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

(a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
(b) $|1 + z\overline{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$,
(c) $|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.

Podaj interpretację geometryczną pierwszej tożsamości.

9. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

(i) $|x + y|^2 + |y + z|^2 + |z + x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x + y + z|^2$;
(ii) $|x + y| + |y + z| + |z + x| \leqslant |x| + |y| + |z| + |x + y + z|$.

10. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i, (b) $2+2i$, (c) $-1+\sqrt{3}i$, (d) $\dfrac{3+2i}{-2+3i}$, (e) $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$, (f) $2 + \sqrt{3} + i$.

11. Niech $z = r \cdot \mathrm{cis}\,\alpha$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Wyznacz postać trygonometryczną liczby $z^m \cdot \overline{z}^n$.

12. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$, (b) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha$, (c) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, (d) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

13. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1 + i)^{2022}$, (b) $(1 + i\sqrt{3})^{1000}$, (c) $\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{-100}$, (d) $\left(\dfrac{9+5i}{7-2i}\right)^{8}$, (e) $\dfrac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$.

14. Wyraź $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $\mathrm{tg}\,(5x)$ przez $\mathrm{tg}\,x$

15. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone (a) stopnia 3 z liczb 1, i, -1, (b) stopnia 4 z liczb i i -1.

16. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n.

17. Rozwiąż równania

(a) $81(z + i)^4 = |z|^8$,
(b) $(z + 2)^6 = (z - 2)^6$,
(c) $(z + i)(\overline{z} - i)^2(iz - 1)^3 = 64$

18. Wykaż, że liczba $\xi = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia, mimo że $|\xi| = 1$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 25. 7.6.2023

Liczby zespolone II

1. Rozwiąż równania

(a) $z^2 - 4z - 5 = 0$

(b) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$

(c) $z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0$

2. Oblicz $\cos\frac{2\pi}{5}$ oraz $\sin\frac{2\pi}{5}$.

3. Niech $z = \operatorname{cis}\theta$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ oraz $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$.

4. Oblicz $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

5. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znajdź wzory dla sum

$$\sum_{k=0}^{n} \cos nx, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin nx.$$

6. Dane są liczy zespolone u, v, w takie, że $u+v+w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

7. Załóżmy, że $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$. Udowodnij, że

(a) $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$,

(b) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$,

(c) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$.

8. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x + y + z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left|\frac{xy + yz + zx}{x + y + z}\right| = a.$$

9. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(\varepsilon_k \overline{z}) \cdot \varepsilon_k.$$

10. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right).$$

11. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\overline{z})^n$ jest rzeczywista?

12. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$|a - (1+i)^n| = a.$$

13. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$, $\varepsilon \neq 1$ jest pierwiastkiem z jedności stopnia n. Udowodnij, że

$$|1 - \varepsilon| > \frac{2}{n-1}.$$

14. Dane są liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| > 0$. Udowodnij, że

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

15. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \ldots |1+z^{2n}| + |1+z^{2n+1}| \geqslant 2n.$$

16. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|x_j\overline{y_k} - x_k\overline{y_j}|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Cauchye'ego – Schwarza:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}\right|^2.$$