Kilka zadań na dobry początek

Umawiamy się, że liczby naturalne to $1, 2, 3, 4, \ldots$. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy $\mathbb{N}$.

---

1. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?

2. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny.

4. Każda osoba na świecie uścisnęła dłoń pewnej liczbie innych osób. Udowodnij, że liczba osób, które uścisnęły dłoń nieparzystej liczbie osób, jest parzysta.

5. W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczynka zna n chłopców i każdy chłopiec zna n dziewcząt, liczba n jest naturalna. Udowodnij, że w grupie jest ta sama liczba chłopców i dziewcząt.

6. 200 osób posadzono w 10 rzędach, po 20 w każdym rzędzie. Z każdej z tak utworzonych 20 kolumn wybrano najniższą osobę i z tych wybranych 20 osób wybrano najwyższą i dano jej do potrzymania niebieski balonik.

Następnie, wybrano najwyższą osobę z każdego rzędu i z tych 10 osób wybrano najniższą i dano jej do potrzymania czerwony balonik.

Okazało się, że te dwie wybrane osoby są różnego wzrostu. Która z nich jest wyższa?

7. Udowodnij, że jeżeli

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

to

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

8. Pokaż, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować wartość *prawda* (1) lub *fałsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *fałsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja *nie p*	**koniunkcja** *p i q*	**alternatywa** *p lub q*	**implikacja** *z p wynika q*	**równoważność** *p wtw., gdy q*
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażeń. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- *prawo podwójnego przeczenia*: $\sim (\sim p) \iff p$,
- *prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,

---

1. Sporządź tabelkę wartości dla wyrażeń logicznych
(a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, (b) $\big((p \wedge q) \vee (\sim p)\big) \Rightarrow q$.

2. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?

3. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy i alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.

4. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:

(a) *Prawo wyłączonego środka:* $p \vee \sim p$,

(b) *Pierwsze prawo de Morgana:* $\sim (p \wedge q) \iff \big((\sim p) \vee (\sim q)\big)$,

(c) *Drugie prawo de Morgana:* $\sim (p \vee q) \iff \big((\sim p) \wedge (\sim q)\big)$,

(d) *Prawo przechodności implikacji:* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

5. Które dwuargumentowe operacje logiczne, poza implikacją, są przechodnie?

6. Zapisz alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.

7. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.

8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej a:
(a) $-10 < a \leqslant 2019$, (b) $|a| < 50$, (c) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (d) $x = 10 \vee x > 5$.

9. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśl tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie zapisano żadnych innych zdań).

10. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wysypy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?

11. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukradł konia. B zeznał, że konia ukradł C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukradł konia. Kto ukradł konia?

12. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania: (1) *Czy ten drugi informator jest kłamcą?* i (2) *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?* Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)

13. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażeń logicznych. Które z tych wyrażeń są tautologiami?

(a) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,

(b) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(c) $\big((p \vee q) \wedge r\big) \iff \big((p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big)$,

(d) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$,

14. O liczbach a, b, c, d, e wiadomo, że

(i) $(e > a) \Rightarrow \big((e > b) \vee (e < c)\big)$,

(ii) $(e \leqslant b) \Rightarrow (e < d)$,

(iii) $\big((e < d) \wedge (e > a)\big) \Rightarrow (e \geqslant c)$,

(iv) $\big((e < d) \wedge (e \leqslant b)\big) \Rightarrow (e > a)$.

Która z liczb jest większa: e czy b?

Analiza - klasa 1a Zestaw 3. 15.9.2021

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$, przecięcie (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, różnica zbiorów: $A \setminus B$.

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako *x jest elementem (należy do) zbioru A*, $x \notin A$ jako *x nie jest elementem (nie należy do) zbioru A*.

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że *A jest podzbiorem B*

Dopełnienie zbioru Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

---

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \triangle B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.

2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
(a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.

3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna
(a) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \Rightarrow x \in B$
(b) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \iff x \in B$

4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
(b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \triangle B$,
(c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(d) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,
(e) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
(f) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

5. A, B, C to zbiory. Który zbiór jest większy: $A \cup (B \triangle C)$ czy $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$?

6. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \triangle E \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle D) \cup (D \triangle E)$.

7. A, B, C, D to zbiory. Czy jest prawdą, że

(a) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus C) \triangle (C \setminus A) = (B \setminus A) \triangle (A \setminus C) \triangle (C \setminus B)$,
(b) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus C) \triangle (C \setminus D) \triangle (D \setminus A) = (B \setminus A) \triangle (C \setminus B) \triangle (D \setminus C) \triangle (A \setminus D)$?

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Ponadto, spotyka się oznaczenia:

- $\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,
- $\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych niedodatnich.

Podobnie definiuje się $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi p(x)*, np:
(a) *Dla każdej liczby nauturalnej x prawdziwa jest nierówność* $x \geqslant 1$,
(b) *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi* $x = 0$ *lub* $x < 0$ *lub* $x > 0$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \forall_{x \in \mathbb{N}}\, x \geqslant 1, \qquad \text{(b)} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}\, (x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0).$$

$\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym.*

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x ze zbioru X, dla którego zachodzi p(x)*, np:
(a) *Istnieje liczba naturalna x taka, że* $x > 2020$,
(b) *Istnieje liczba rzeczywista x taka, że* $x^2 = 2$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \exists_{x \in \mathbb{N}}\, x > 2020, \qquad \text{(b)} \quad \exists_{x \in \mathbb{R}}\, x^2 = 2.$$

$\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym.*

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\, (x > 1 \Rightarrow x^n > 1) \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\, (x > 1 \Rightarrow x^n > 1)$$

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\, (x^2 = n + 1 \wedge x > n) \iff \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}}\, (x^2 = n + 1 \wedge x > n).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólngo i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

$$\text{(i)} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\, x < n, \qquad \text{(ii)} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\, x < n.$$

Zawsze prawdziwa jest jednak implikacja:

$$\Big(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y}\, p(x, y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\, p(x, y)\Big)$$

Na przykład:

$$\Big(\exists_{x \in \mathbb{N}} \forall_{y > 1}\, y^2 > x\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y > 1} \exists_{x \in \mathbb{N}}\, y^2 > x\Big).$$

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

$$\text{(i)} \sim \Big(\forall_{x \in \Omega}\, p(x)\Big) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x), \quad \text{(ii)} \sim \Big(\exists_{x \in \Omega}\, p(x)\Big) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x).$$

---

8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2 \mid n^2 + n^5$

(b) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n^n = 16\,777\,216$

(c) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}}\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > n$

(d) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{Z}}\ x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$

(e) $\exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x>0} \exists_{k\in\mathbb{N}}\ \sqrt[k]{x} < n$

(f) $\forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{x>0} \forall_{n\in\mathbb{Z}_+}\ (n + \frac{1}{100})^k \geqslant xn$

(g) $\exists_{q\in\mathbb{Q}} \forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{k\in\mathbb{Z}}\ q = xk \quad \Rightarrow \quad q = x \vee q = n$

Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

9. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej.*

10. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru Ω. Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$

(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

11. Dane są zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$, przy czym $B_k \subset B_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Udowodnij, że

$$(A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2) \cap \ldots \cap (A_n \triangle B_n) \subset (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \triangle B_n.$$

12. Dane są zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takie, że $A_k \subset A_1$ dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Udowodnij, że

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_1 \setminus A_n) \cup A_n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 4. 5.10.2021

Wzory skróconego mnożenia

Prawdziwe są następujące tożsamości:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat sumy,}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat różnicy,}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad \text{Wzór na różnicę kwadratów.}$$

oraz

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

Własności liczb rzeczywistych, które warto pamiętać: Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b

(i) $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

(ii) $a^2 + b^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$.

---

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz (w pamięci) 19^2, 52^2, 195^2, 107^2, 999^2.

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, $495 \cdot 505$.

3. Rozwiąż równania

(a) $x^2 - 2x = 3$

(b) $x^2 + x = 2$;

(c) $x^2 + 1 = x$;

(d) $4x^2 - 2x = \frac{3}{4}$

4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze postaci $k^{2n} - 1$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a \cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

(b) Każda z liczb całkowitych a, b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a \cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

(c) Które liczby naturalne są różnicami kwadratów dwóch liczb całkowitych?

6. Uprość sumy

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$,

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

(d) $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

7. Rozwiąż równania

(a) $x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \dfrac{1}{3}$,

(b) $x^2 - 3y^2 + 2xy = 2(x-y)$,

(c) $y^4 + 2x^4 + 1 = 4x^2y$.

8. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, dla których zachodzi równość

$$(x-y+z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

9. Wyznacz rozwiązania układu równań w liczbach całkowitych x, y, z

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy+xz = 8-x^2 \\ xy+yz = 12-y^2 \\ yz+zx = -4-z^2 \end{cases}$$

12. Wyznacz wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniających równanie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

13. Rozłóż na czynniki wyrażenia: (a) a^4+4b^4, (b) a^8-16b^8, (c) $a^{12}-4b^{12}+4a^8b^4-a^4b^8$

14. Uprość sumy

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}.$$

15. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci a^4+3, gdzie $a \in \mathbb{N}$ i $a > 1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

Analiza - klasa 1a   Zestaw 5.   13.10.2021

Nierówności

Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

(1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;

(2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;

(3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

(4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

(5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$!!!

(6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;

(7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$!!!

(8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

(9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;

(10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;

(11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:

$$\max(a, b) \geqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geqslant \min(a, b).$$

Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?

2. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Kiedy zachodzi równość?

3. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

4. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

5. Udowodnij nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną czterech liczb dodatnich a, b, c, d:

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2}$ czy $2\sqrt{n + 1}$?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leqslant 3d, \quad b + c + d \leqslant 3a, \quad c + d + a \leqslant 3b, \quad d + a + b \leqslant 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

9. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb $a - b^2$, $b - c^2$, $c - a^2$ przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.

10. Załóżmy, że $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

11. Która z pięciu liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

12. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{1}{a} + 3b\right)\left(\frac{1}{b} + 3a\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 24,$ (b) $(a+b)\cdot\sqrt{\frac{a + b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$

13. Załóżmy, że $a, b \geqslant 0$. Udowodnij nierówności

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \leqslant \frac{2(a + b)}{2 + a + b}.$$

14. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geqslant \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$

15. Agent Tajny pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogiemu Agentowi?

16. Samochody A i B jadą po okrężnej trasie, której $1/4$ długości przebiega w mieście. Szybkość A w mieście wynosi $2v$, a poza miastem $9v/4$. Szybkość B w mieście wynosi v a poza miastem $3v$. Samochody razem wjeżdżają do miasta. Który z nich i po jakim czasie minie drugiego, jeżeli długość miejskiej drogi wynosi s?

Analiza - klasa 1a Zestaw 6. 20.10.2021

Powtórzenie

1. Czy poniższe zdanie logiczne jest tautologią?

$$\big((p \vee q) \quad \Rightarrow \quad (q \wedge r)\big) \iff \big((\sim p \wedge \sim q) \vee q \wedge r\big).$$

Uzasadnij odpowiedź.

2. W trakcie kolejnej misji Agent Tajny (A.T.) ma 3 informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Informatorzy wiedzą, który z nich kłamie, a który mówi prawdę. Każdemu informatorowi A.T. zadał dwa pytania:

1. *Czy któryś z pozostałych informatorów kłamie wtedy i tylko wtedy, gdy ty mówisz prawdę?*
2. *Czy, jeśli kłamiesz, to któryś z pozostałych informatorów mówi prawdę?*

Czy na podstawie otrzymanych odpowiedzi A.T. może stwierdzić, który informator mówi prawdę, a który kłamie?

3. Zapisz zaprzeczenie poniższego zdania i rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie.

$$\exists_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{z\in\mathbb{R}} \, (xy \leqslant 0) \vee (x + z > y).$$

4. Dane są zbiory A, B, C, D. Udowodnij, że zbiór

$$X = \big(A\triangle(B \cup C \cup D)\big) \cap \big(B\triangle(C \cup D \cup A)\big) \cap \big(C\triangle(D \cup A \cup B)\big)$$

składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C, D.

5. Dla danej liczby naturalnej n niech A_n oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od n.

(a) Udowodnij, że jeśli $k, l, m \in \mathbb{N}$, to

$$\big(m \in A_{k+l} \triangle (A_k \setminus A_l)\big) \iff \big((m > k + l) \vee (k < m \leqslant l)\big).$$

(b) Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie:

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{l\in\mathbb{N}} \forall_{m\in\mathbb{N}} \; m \in A_{k+l} \triangle (A_k \setminus A_l).$$

6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x + y) \cdot z + x^2 = -3 \\ (y + z) \cdot x + y^2 = 0 \\ (z + x) \cdot y + z^2 = 3 \end{cases}$$

7. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} 2y^2 + 4z^2 - 4yz + 2y + 1 = 0 \\ 3z^2 - 6z + 3 = x^2 \end{cases}$$

8. Dane są liczby dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a + b < c + d \quad \text{i} \quad a + c < b + d.$$

Udowodnij, że

$$a \cdot (a + b + c) < d \cdot (b + c + d).$$

9. Liczby x, y, z są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$(x + y)(y + z) \leqslant x^2 + 2y^2 + z^2.$$

10. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{abc}\big(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\big).$$

Wzory dla trzecich potęg

Dla dowolnych liczb a, b

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

1. Rozwiń potęgi:

(a) $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^3$; (b) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b\right)^3$; (c) $(x^2y-z^3)^3$; (d) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$; (e) $\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^3$.

2. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń:

(a) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$; (b) $x^3-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^9}$; (c) $\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2y+6xy^2-8y^3$; (d) $x^6-3x^3+3-\frac{1}{x^3}$.

3. Załóżmy, że $x+\frac{1}{x}=3$. Oblicz $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^5+\frac{1}{x^5}$ i $x^9+\frac{1}{x^9}$.

4. Załóżmy, że $x-\frac{1}{x}=-2$. Oblicz $x^3-\frac{1}{x^3}$ i $x^6-\frac{1}{x^6}$.

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych.

6. Załóżmy, że $x+y=a$ i $xy=b$. Wyraź za pomocą a i b wartości wyrażeń (gdy trzeba, zakładamy, że $x\neq 0$ i $y\neq 0$):

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad x^2+y^2,\quad x^3+y^3,\quad |x-y|,\quad |x^3-y^3|,\quad x^4+y^4.$$

7. Załóżmy, że $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$. Wyraź poprzez a,b,c wartości wyrażeń

(a) $x^2+y^2+z^2$, (b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, (c) $x^3+y^3+z^3$, (d) $(x+y)(y+z)(z+x)$, (e) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$, (f) $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

8. Wykaż, że **nie istnieje** trójka liczb rzeczywistych a,b,c takich, że

$$a+b+c=4,\quad ab+bc+ca=2,\quad \text{oraz}\quad abc=1.$$

9. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $x^3-xy^2+x^2y-y^3$; (b) $x^3+xy^2-x^2y-y^3$; (c) $a^3+b^3+3ab-1$; (d) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$;

(e) $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2b-3a)^3$;
(f) $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$.

10. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}\neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a,b,c są parami różne.

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba $n^{12}+64$ jest iloczynem **czterech różnych** liczb naturalnych więszych od 1.

12. Liczby całkowite k,l,m spełniają równość

$$(k-l)^2+(l-m)^2+(m-k)^2=klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3+l^3+m^3$ jest podzielna przez $k+l+m+6$.

13. Udowodnij nierówności między średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną trzech liczb dodatnich x,y,z:

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

Kiedy te nierówności stają się równościami?

14. Liczby a,b,c są dodatnie. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

15. Załóżmy, że $x,y,z>0$. Udowodnij, że

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9.$$

16. Załóżmy, że $a,b,c\geqslant 0$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}.$$

17. Niech $a, b, c > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant ab + bc + ca.$$

18. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

19. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 1$. Wykaż, że

$$\frac{64}{27xyz} \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

20. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geqslant \max(a, b, c).$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 8. 30.11.2021

Indukcja matematyczna I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n, może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

(i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,

(ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1},

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$ implikacji $T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$.

---

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$

(h) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad (n \geqslant 2)$,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=k}^{k+3} \frac{1}{j} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$,

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij równości

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$,

(b) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

3. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

4. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

5. **(WAŻNE!!)** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeśeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(a) $6 \mid n^3 + 5n$,

(b) $9 \mid 4^n + 15n - 1$,

(c) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

(e) $37 \mid 1000^n - 1$,

(f) $13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}$,

(g) $41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,

(h) $10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6$.

7. Udowodnij, że n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż 2^n obszarów.

8. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają puktu wspólnego?

9. Na płaszczyźnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

10. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

11. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

12. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k.

13. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

Analiza - klasa 1a Zestaw 9. 14.12.2021

Indukcja matematyczna II (Nierówności)

1. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność
$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności
$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

(a) $2^n > n^2$

(b) $n! > n^3$

(c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$

(d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$

(e) $(n!)^2 > n^n$

(f) $(2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{3n}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n
$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leqslant n.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > \frac{13}{12}$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności
$$2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3.$$

10. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

11. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geqslant 12$.

12. Udowodnij **nierówność Bernoulliego:**

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

13. Kiedy nierówność Bernoulliego staje się równością?

14. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność
$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 10. 5.1.2022

Indukcja matematyczna III

Twierdzenie (Silna indukcja). Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli

(i) zdanie T_1 jest prawdziwe

oraz

(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \ldots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}

to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

---

1. Wskaż błąd w poniższym rozumowaniu:

Udowodnimy, że wszystkie konie są tego samego koloru, tzn. dla każdej liczby naturalnej n wykażemy zadanie T_n : każde n kotów jest tego samego koloru.

T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo jest tylko jeden kot.

Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k. Rozważmy dowolną grupę $k+1$ kotów i ponumerujmy koty liczbami $1, 2, \ldots, k, k+1$. Koty o numerach $1, 2, \ldots, k$ są tego samego koloru, bo jest ich k, tak samo koty o numerach $2, 3, \ldots, k+1$ są tego samewgo koloru, bo jest ich k. Zatem dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots, k$ koty o numerach j i $j+1$ są tego samego koloru, więc wszystkie $k+1$ kotów jest tego samego koloru. Na mocy zasady indukcje zdanie T_n jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

3. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.

4. Załóżmy, że $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$a_n = 2^n + 3^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

5. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α, β lub γ, przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.

6. Wierzchołki n-kata wypukłego pomalowano trzema różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmniej jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.

7. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.

8. Udowodnij, że każda liczba naturalna złożona jest iloczynem liczb pierwszych.

9. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.

10. **Liczby Fibonacciego.** Niech $f_1 = f_2 = 1$ i dla $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Udowodnij, że $f_n \leqslant 2^{n-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(b) (**Wzór Bineta**) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(c) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych liczb Fibonacciego.

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa $n!$.

12. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ to liczby naturalne takie, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < nm.$$

Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.

Analiza - klasa 1a Zestaw 11. 12.01.2022

Powtórzenie

1. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że

$$x > \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 11.$$

Znajdź wartości wyrażeń $x - \frac{1}{x}$ oraz $x^6 + \frac{1}{x^6}$.

2. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że

$$x + y + z = -5, \quad xy + yz + zx = 2, \quad xyz = 12.$$

Wyznacz wartości wyrażeń:

$$x^3 + y^3 + z^3 \quad \text{oraz} \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

3. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{3}{a+b+c}.$$

4. Liczby a, b, c, d są dodatnie i $a + b + c + d = 1$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{c} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - 1\right) \geqslant 81.$$

5. Niech $x \in [0, 1]$. Udowodnij, że $x \cdot (1 - x)^2 \leqslant \frac{4}{27}$ i wyznacz $x \in [0, 1]$ dla którego nierówność staje się równością.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij przez indukcję, że

(a) $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$, (b) $25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$.

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(4n^2 + 8n + 3)}{3}.$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(k - 1) \cdot k!}{2^{k+1}} = \frac{(n + 1)! - 2^n}{2^{n+1}}.$$

9. Niech $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnij, że dla każdego n

$$a_n = 2^{2^n} - 1.$$

10. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że spełniona jest nierówność

(a) $3^n > n \cdot 2^n$, (b) $n \cdot 5^n > 3^{n+1} + (n + 1)^2 \cdot 2^n$.

11. Udowodnij, że dla każdej liczbyu naturalnej n

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

12. Niech $x \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n - 1)}{2}x^2.$$

13. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3.$$

14. Niech $x_0 = x_1 = 1$ oraz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wykaż, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$x_n = a(1 + \sqrt{2})^n + b(1 - \sqrt{2})^n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 12. 18.01.2022

Zastosowania nierówności Bernoulliego

Tw. (Nierówność Bernoulliego) Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ lub $n=1$.

---

1. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$, to

$$\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{n}.$$

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geqslant 2n-1,$ (b) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \dfrac{1}{n+3}$

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n,$$

gdzie $a, b > 0$.

5. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: n^n czy $(n+1)^{n-1}$

6. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $\sqrt[n+1]{n+1}$ czy $\sqrt[n]{n}$.

7. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnij nierówności

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3\cdot\frac{n+1}{n+2} < 3.$$

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

9. Wykaż, że

$$\forall_{x>1}\,\forall_{k\in\mathbb{N}}\,\exists_{c>0}\,\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x^n \geqslant cn^k.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} \leqslant n+1.$$

11. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ i $k_{n+1} = k_1$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k_j}\right)^{k_{j+1}} \geqslant 2^n.$$

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ i $a_{n+1} = a_1$. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[a_{i+1}]{a_i}} \geqslant 1.$$

Analiza - klasa 1a   Zestaw 13.   16.2.2022

Nierówność Cauchy'ego I

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- z wykorzystaniem tzw. **indukcji Cauchy'ego**: *jeżeli prawdziwe jest twierdzenie T_1 oraz zachodzą implikacje $T_n \Rightarrow T_{2n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ oraz $T_n \Rightarrow T_{n-1}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, to dla każdego n prawdziwe jest zdanie T_n.*
- z wykorzystaniem zwykłej indukcji (zob. zadanie 13),
- z wykorzystaniem **nierówności Bernoulliego**,
- za pomocą ciągów jednomonotonicznych.

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, rówość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

1. Dana jest liczba naturalna n. Udowodnij, że

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

3. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4c \geqslant 7.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta i $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to pole tego trójkąta wynosi $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (wzór Herona). Udowodnij, że spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.

9. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

10. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

11. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$, takie że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \ldots + \frac{1}{a_n^k} \geqslant n^{k+1}.$$

12. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wszystkie większe od -1. Udowodnij, nierówność

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n}.$$

13. Udowodnij (nie korzystając z nierówności Cauchy'ego!), że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieujemne i $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, to $a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant 1$. Następnie udowodnij nierówność Cauchy'ego, korzystając z powyższej tezy.

14. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 14. 23.2.2022

Nierówność Cauchy'ego II

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$

2. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

3. Suma liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa 1. Udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_n}-1\right) \geqslant (n-1)^n.$$

4. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Za pomocą nierówności Cauchy'ego udowodnij nierówności

(a) $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, (b) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

6. Niech $x, y, z \geqslant 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$n^n - 1 \geqslant \sqrt{n^{n+1}}\cdot(n-1).$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n\cdot\sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

9. Niech $q > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(q^n-1)(q^{n+1}+1) \geqslant 2nq(q-1).$$

10. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n\left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}}\right).$$

11. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geqslant 1.$$

12. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie. Udowodnj nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \geqslant 4n^2.$$

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(n+1)^{2n} \geqslant 3^n\cdot(n!)^2.$$

14. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wyznacz maksymalną wartość iloczynu

$$(x-a)^m\cdot(b-x)^n,$$

gdzie $a \leqslant x \leqslant b$.

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

16. Rozwiąż równanie $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

17. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{100}} \end{cases}$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 15. 8.3.2022

Ciągi jednomonotoniczne

Definicja. Mówimy, że dwa ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są *jednomonotoniczne*, jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ lub $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

Umawiamy się, że dla dwóch ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Mówimy, że ciąg $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ jest *permutacją* ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, jeżeli zmieniając kolejność wyrazów w jednym ciągu możemy otrzymać drugi.

Twierdzenie. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są jednomotoniczne, to to dla dowlonej permutacji $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zachodzą nierówności

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix}.$$

1. Liczby a, b są dodatnie. Udowodnij nierówności

(a) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$,

(b) $a^2 + b^2 \leqslant \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}$,

(c) $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leqslant \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}}$,

(d) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. Liczby x, y są dodatnie, $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant a^m b^n + a^n b^m$.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$

(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$

(c) $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2} + \frac{a_n}{a_1^2} \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geqslant 6abc.$$

6. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \ldots + \frac{a_n}{a'_n} \geqslant n.$$

Następnie za pomocą tej nierówności udowodnij nierówność Cauchy'ego.

7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

9. Dane są liczby $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ i $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ i permutacja $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ciągu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2.$$

10. **Nierówność Czebyszewa.** Niech $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Udowodnij, że wówczas

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

11. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że wówczas zachodzi nierówność

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

12. Niech a, b, c to długości boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówności

$$\frac{a(b+c-a)}{bc} + \frac{b(c+a-b)}{ca} + \frac{c(a+b-c)}{ab} \leqslant 3 \leqslant \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

14. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że wówczas prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$,

(b) $\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \ldots + \frac{S}{S-a_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$.

Powtórzenie – nierówności

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność

(a) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2-1} < \frac{1}{n+2}$, (b) $\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}$.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{k}{k+1}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(1+\frac{2^n}{n!}\right)^n \geqslant 1 + \frac{2^{2n-1}}{n!(n-2)!}.$$

4. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(1+x)^4 \cdot \sqrt[3]{1-x}$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

5. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie oraz $a_{n+1} = a_1$ i $a_{n+2} = a_2$. Udowodnij nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^3 a_{k+1}^3}\right) \geqslant n^2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej b i liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant b^n.$$

7. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają nierówność $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

8. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówności

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

9. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a.$$

10. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Wzór dwumianowy Newtona

Dla liczb $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy *symbol Newtona* (*symbol dwumienny*) jako: gdy $n \geqslant k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

natomiast gdy $n < k$ przyjmujemy, że $\binom{n}{k} = 0$.

Tożsamość Pascala. Dla $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi równość

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Trójkąt Pascala. Wartości symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można dla niezbyt dużych n łatwo wyznaczyć za pomocą tzw. trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tabela, której wiersze odpowiadają kolejnym wartościom n:

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Z tożsamości Pascala wynika, że w każdym wierszu począwszy od trzeciego każdy nieskrajny wyraz jest sumą dwóch wyrazów bezpośrednio nad nim. Można więc szybko wypełniać kolejne wiersze. Dla 6 wierszy (do $n = 5$) otrzymamy:

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Twierdzenie (wzór dwumianowy Newtona). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1. Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$ liczba $\binom{n}{k}$ jest całkowita.

2. Rozwiń wyrażenia:

(a) $(a+b)^5$, (b) $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^6$, (c) $(a+b-c)^4$.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzory na liczby całkowite a_n i b_n takie, że

$$\left(3+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

4. Korzystając ze wzoru Newtona udowodnij tożsamości

(a) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

5. Uprość sumy:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$, (c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

6. Udowodnij tożsamości:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}$

(b) $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) a^k b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}$

7. „Uprość" sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 a^k b^{n-k}$,

(b) $\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)(k-2) a^k b^{n-k}$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumy

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ (b) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 4^{n-k}$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

jest całkowita i parzysta.

Analiza - klasa 1a Zestaw 16. 20.4.2022

Podzielność liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b, piszemy $a \nmid b$.

Przydatne własności podzielności liczb:

(i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a.

(ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.

(iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.

(iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.

(vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.

(vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leqslant r \leqslant a-1$ oraz $b = ak+r$. Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b.

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

---

1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

(a) $n+1 \mid n^2+1$,

(b) $n-1 \mid n^5+5$.

2. Udowodnij, że iloczyn n kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $n!$.

3. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

4. Wyznacz reszty z dzielenia liczby $2^{2022}+1$ przez $5, 7, 9$.

5. Udowodnij (korzystając tylko z zawartości tej kartki), że jeśli liczba nieparzysta d jest dzielnikiem liczby $2^k n$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, to d jest dzielnikiem n.

6. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $2n+1 \mid n^3 - 3n + 2$.

7. Liczba n jest nieparzysta. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3n^3 + 2n^2 + n - 1$ przez 8.

8. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}?$$

9. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez $3, 4, 7$?

10. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.

11. Suma reszt z dzielenia liczb całkowitych a, b przez d wynosi d. Udowodnij, że

(a) $d \mid a^k - b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej parzystej k,

(b) $d \mid a^k + b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej nieprarzystej k.

12. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.

13. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n.

14. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a+b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

15. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a+b+c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3+b^3+c^3$.

16. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a+b+c \qquad \text{oraz} \qquad d \mid a^2+b^2+c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

17. Liczby $p, q > 2$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$p \mid 1^q + 2^q + \ldots + (p-1)^q.$$

Kongruencje

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą naturalną.

Definicja. Mówimy, że *a przystaje do b modulo m* wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod m \iff m \mid a - b$$

i nazywamy *kongruencją / przystawaniem modulo m.*

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod m$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m.

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m, to piszemy $a \not\equiv b \pmod m$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

(i) $a \equiv a \pmod m$ (zwrotność),

(ii) $a \equiv b \pmod m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod m$ (symetria),

(iii) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $b \equiv c \pmod m$, to $a \equiv c \pmod m$ (przechodniość),

(iv) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, to $a + c \equiv b + d \pmod m$ oraz $a - c \equiv b - d \pmod m$;

(v) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, to $ac \equiv bd \pmod m$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod m$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod m$.

---

1. Wyznacz resztę z dzielenia liczby
(a) $28 \cdot 33 \cdot 73$ przez 35, (b) 111111 przez 7, (c) 123456789 przez 13

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod 4$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Liczb n jest nieparzysta. Wykaż, że $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv k \pmod 8$, gdzie $k = 3, 6, 7$. Udowodnij, że liczba n nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

5. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

6. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x+y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7 \mid x-2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4\,378\,479$.

7. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i r_k to reszta z dzielenia liczby r^k przez m dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykaż, że od pewnego momentu liczby r_k będą się powtarzać cyklicznie. Wyznacz te cykle dla (a) $n = 2$, $m = 17$; (b) $n = 6$, $m = 32$.

8. Znajdź resztę z dzielenia

(a) 3^{89} przez 7, (b) 4^{2022} przez 26, (c) 9^{1000} przez 210

9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$,
(b) $13 \mid 3^{3n+1} + 9^{3n+1} + 1$,
(c) $21 \mid 2^{4^n} + 5$,
(d) $323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$.

10. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczb

(a) $99^{99} - 51^{51}$,
(b) 5^{555},
(c) 9^{9^9},
(d) $3^{4^{5^{6^7}}}$.

11. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

12. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $7 \mid 2^n - 1$.
Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

13. Liczby a, b, c są całkowite i $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że

$$9 \mid a^2 - b^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid b^2 - c^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid c^2 - a^2.$$

14. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

15. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $3 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 3.

(b) $9 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 9.

(c) $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzemienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $40 \mid n$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 20. 17.5.2022

NWD i NWW

Niech $S \subset \mathbb{N}$. Wówczas $\min S$ oznacza najmniejszą liczbę ze zbioru S. Jeżeli zbiór S jest skończony, to $\max S$ oznacza największą liczbę z tego zbioru.

Największy wspólny dzielnik liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jest to liczba

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_1, d \mid a_2, \ldots, d \mid a_k\}.$$

Tw. 1. (Tożsamość Bezout'a) Dla dowolnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takie, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k.$$

Tw. 2. Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$d \mid \mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Definicja. Mówimy, że liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jeżeli $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

Tw. 3. Liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = 1$.

Tw. 4. (Algorytm Euklidesa) $\mathrm{NWD}(a, b)$, gdzie $a \geqslant b > 0$, można wyznaczyć za pomocą następującego algorytmu: Niech $x_1 = a$, $x_2 = b$. Wykonujemy kolejne dzielenia z resztą, aż do otrzymania zerowej reszty:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1x_2 + x_3, && 0 < x_3 < x_2 \\ x_2 &= q_2x_3 + x_4, && 0 < x_4 < x_3 \\ &\ldots \\ x_{k-1} &= q_{k-1}x_k + x_{k+1}, && 0 < x_{k+1} < x_k \\ x_k &= q_kx_{k+1}. \end{aligned}$$

Wówczas $\mathrm{NWD}(a, b) = x_{k+1}$ (ostatnia niezerowa reszta).

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Każdą liczbę $m \in \mathbb{N}$ taką, że $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m$, ..., $a_k \mid m$ nazywamy *wspólną wielokrotnością* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest to liczba

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_1 \mid m, a_2 \mid m, \ldots, a_k \mid m\}.$$

Tw. 5. Jeżeli $m \in \mathbb{N}$ jest wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid m.$$

Tw. 6. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\mathrm{NWW}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(a, b) = ab.$$

1. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że (a) $\mathrm{NWD}(n, n+1) = 1$, (b) $\mathrm{NWD}(2n-1, 2n+1) = 1$

2. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $\mathrm{NWD}(5a + 3b, 13a + 8b) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

3. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Wykaż, że liczby $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ są względnie pierwsze.

4. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ i $c \mid a$. Wykaż, że $\mathrm{NWD}(b, c) = 1$.

5. **Zasadnicze twierdzenie arytmetyki.** Niech $a, b, d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, d) = 1$ i $d \mid ab$. Udowodnij, że $d \mid b$.

6. Liczby $a, b, n \in \mathbb{N}$ spełniają warunki $a \mid n$, $b \mid n$ i $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Udowodnij, że $ab \mid n$

7. Niech $a, b, k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) jeżeli $k \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{NWD}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{NWD}(a, b)$;

(b) jeżeli $k \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(k, b) = 1$, to $\mathrm{NWD}(ka, b) = \mathrm{NWD}(a, b)$;

(c) $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - b, \min(a, b))$.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczby $2k + 1$ i $9k + 4$ są względnie pierwsze.

9. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n > 6$ jest sumą dwóch liczb naturalnych większych od 1 i względnie pierwszych.

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(6, n) = 1$. Udowodnij, że $24 \mid n^2 - 1$

12. Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\mathrm{NWD}(a, b)$ i znajdź $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = ax + by$, dla

(a) $a = 329$, $b = 182$,

(b) $a = 1492$, $b = 1066$,

(c) $a = 1745$, $b = 1485$,

(d) $a = 13832$, $b = 7254$.

13. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(a, b, c) = \mathrm{NWD}\big(\mathrm{NWD}(a, b), c\big)$.

14. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i m jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ są względnie pierwsze.

15. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$. Udowodonij, że

$$\mathrm{NWD}\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \mathrm{NWD}(a - 1, n).$$

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, 2n) = \mathrm{NWW}(n + 1, n + 2, \ldots, 2n).$$

17. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{NWD}(a,b)} - 1$.

18. Liczby a, b, n są naturalne i $\mathrm{NWD}(a, b, n) = 1$. Udowodnij, że istnieją liczby naturalne x, y takie, że $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$ oraz

$$a \equiv x \pmod{n} \qquad \text{i} \qquad b \equiv y \pmod{n}.$$

Powtórzenie

1. Udowodnij tożsamości (n, j, k to liczby całkowite nieujemne)

(a) $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$, gdzie $k < n$,

(b) $\binom{n}{j} \cdot \binom{n-j}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j} = \binom{n}{j+k} \cdot \binom{j+k}{j}$, gdzie $j + k \leqslant n$.

2. Uprość sumy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \cdot 3^k, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} \cdot 5^k.$$

3. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$ i $23 \mid 3x + 2y$. Wykaż, że $23 \mid 17x + 19y$.

4. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n takie, że $2n + 1 \mid 8n^2 + 17$.

5. Znajdź największą liczbę całkowitą n taką, że $n + 10 \mid n^3 + 100$.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

7. Liczby a, b, c, d są nieparzyste. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 8.

8. Znajdź reszty z dzielenia liczby $3^{105} + 4^{105}$ przez 7, 11 i 13.

9. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 2021^{2022}.

10. Wyznacz resztę z dzielenia (a) 7^{7^7} przez 9, (b) 9^{9^9} przez 7.

11. Znajdź liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = ax + by$ dla (a) $a = 91$, $b = 279$, (b) $a = 589, b = 1919$.

12. Liczby k, n są całkowite. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(17k + 3n, 11k + 2n) = \mathrm{NWD}(k, n).$$

13. Liczby a, b, c są naturalne. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(a, b, c) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite x, y, z takie, że $ax + by + cz = 1$.

14. Liczby a, b, n są naturalne. Udowodnij (nie korzystając z rozkładu na liczby pierwsze), że $\mathrm{NWD}(ab, n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{NWD}(a, n) = \mathrm{NWD}(b, n) = 1$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 22. 15.6.2022

Kilka zadań na koniec

1. Dane są liczby naturalne a, b takie, że $a + k \mid b + k$ dla każdej liczby naturalnej k. Udowodnij, że $a = b$.
2. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i $a \equiv b \pmod{n}$. Udowodnij, że $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Czy zachodzi implikacja przeciwna?
3. Dane są liczby naturalne k, n, przy czym k jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$(1 + 2 + \ldots + n) \mid (1^k + 2^k + \ldots + n^k).$$

4. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 4$. Udowodnij, że $1!+2!+\ldots+n!$ nie jest kwadratem lub wyższą potęgą liczby naturalnej.
5. Niech $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ i $a^m + 1 \mid a^n + 1$. Udowodnij, że $m \mid n$.
6. Dane są takie liczby naturalne m i n, że

$$\mathrm{NWD}(m, n) + \mathrm{NWW}(m, n) = m + n.$$

Udowodnij, że jedna z tych liczb jest podzielna przez drugą.

7. Liczby naturalne $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{NWD}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}\right).$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 20. 15.6.2022

Kilka zadań na koniec

1. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i $a \equiv b \pmod{n}$. Udowodnij, że $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Czy zachodzi implikacja przeciwna?

2. Dane są takie liczby naturalne m i n, że

$$\mathrm{NWD}(m, n) + \mathrm{NWW}(m, n) = m + n.$$

Udowodnij, że jedna z tych liczb jest podzielna przez drugą.

3. Dane są liczby naturalne k, n, przy czym k jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$(1 + 2 + \ldots + n) \mid (1^k + 2^k + \ldots + n^k).$$

4. Niech $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ i $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{n_n} \geqslant n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$