

Wielomiany V

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \quad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

1. Rozłóż wielomiany na czynniki o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| (a) $x^6 + 1$, | (e) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$, |
| (b) $x^9 + x^4 - x - 1$, | (f) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$, |
| (c) $x^4 + 4$, | (g) $x^8 + x^4 + 1$, |
| (d) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 2$, | (h) $x^{10} + x^5 + 1$, |

2. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.
3. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k + 1$, $w(k + 1) = k + 2$, $w(k + 2) = k$.
4. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p + 1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k + 1), \dots, f(k + p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.
5. Liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

nie jest rozkładalny w nad $\mathbb{Z}$.

6. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.
7. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

ZADANIA DODATKOWE

8. Rozłóż wielomiany na czynniki o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia:

- | | |
|---|--|
| (a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$, | (e) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$, |
| (b) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, | (f) $(x^2 + x + 1)^2 + 3x(x^2 + x + 1) + 2x^2$, |
| (c) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5x + 15$, | (g) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$ |
| (d) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$, | |

9. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?
10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem czterech różnych liczb naturalnych.
11. Dane są różne liczby całkowite a i b . Pokaż, że wielomian $(x - a)^2(x - b)^2 + 1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.
12. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.
13. Czy wielomian $x^{105} - 9$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.
14. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.
15. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.