Analiza - klasa 3a Zestaw 13. 14.5.2024

Granica ciągu – powtórzenie.

1. Oblicz granice ciągów

(a) $\frac{3n^4-10n^3-2n^2+7}{9n^4-5n^2+19n}$

(b) $\frac{5^{n+1}\cdot n^2-3^{n+2}\cdot n^3}{3n\cdot 5^{n+2}+2^{n+3}\cdot n^6}$

(c) $\frac{2\sqrt{n}-3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1}-2\sqrt[3]{n}}$,

(d) $n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$,

(e) $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}-\sqrt[3]{n^3+1}$,

(f) $\sqrt[n]{7^n-3\cdot 5^n-12}$,

(g) $\frac{n!}{2^{n^2}}$,

(h) $\binom{2n}{n}^{-1}$

(i) $\frac{2^n n!}{n^n}$,

(j) $\left(\frac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(k) $\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n}$,

(l) $\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$,

(m) $\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$,

(n) $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

(o) $\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n^2+1}}$,

(p) $\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}$,

(q) $\frac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}$

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0=3$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0=2$, $b_{n+1}=\frac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0=5$, $c_{n+1}=\frac{(c_n-2)^2}{5}$.

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

4. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=+\infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=+\infty.$$

5. Ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)=1.$$

Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

6. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+1}}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(d) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(e) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(f) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)^3$

(g) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{3^k}\right)$,

(h) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^k}\right)$.

7. Wyznacz kresy zbiorów

(a) $\left\{\frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$,

(b) $\left\{\frac{nm}{2n^2+3m^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$,

(c) $\left\{\min\left(x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right) : x,y>0\right\}$,

(d) $\left\{\frac{1-x}{1+x}+\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-z}{1+z} : x,y,z>0 \text{ i } x+y+z=1\right\}$,

(e) $\left\{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor : n\in\mathbb{N}\right\}$.

8. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$.

9. Wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)_n$ są dodatnie i ciąg $(b_n)_n$ zadany wzorem

$$b_n=a_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$$

jest zbieżny. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.