

Granica ciągu IV

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki:

(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n ,

(ii) istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:

$$(a) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (b) b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}, \quad (c) c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad (d) d_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)^2}.$$

2. Zbadaj zbieżność ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanego następująco:

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = \left(\frac{x_n - 1}{2} \right)^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. **Kryterium Leibniza zbieżności szeregów.** Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ jest zbieżny.

4. Niech $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Wykaż, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że ciąg

$$a_n = \sum_{k=1}^n x_{f(k)}$$

(a) jest rozbieżny,

(b) jest zbieżny do danej liczby rzeczywistej g .

5. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

6. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{i} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

7. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

8. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

9. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leq 2023$. Wykaż, że ciąg $c_n = \sum_{k=1}^n a_{f(k)}$ jest zbieżny.

10. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

11. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right),$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(p+k)!}{k!}.$$

12. Wykaż, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = g.$$

13. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + x_{2n+1}) = 2022, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n-1} + x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} \right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

14. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$