Analiza - klasa 3a Zestaw 11. 19.3.2024

Granica ciągu III

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest
(i) niemalejący i ograniczony z góry
lub
(ii) nierosnący i ograniczony z dołu.
Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Lemat 1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Lemat 2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera.*

Tw. 3. $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\theta_n \in (0,1)$ taka, że $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{nn!}$.

Tw. 4. Liczba e jest niewymierna.

---

1. Wykaż zbieżność ciągów

$$\text{(a) } a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, \quad \text{(b) } b_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \text{(c) } c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right), \quad .$$

2. Niech $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

4. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{a_n^{-1} + b_n^{-1}}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

5. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne do tej samej granicy (zwanej *srednią arytmetyczno – geometryczną* liczb a_1, b_1).

6. Ciąg $(a_n)_n$ spełnia warunki $0 < a_n < 1$ i $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

7. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1} + a_n^3}{3}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Niech $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ i $b_{n+2} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

9. Wykaż, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

10. Oblicz granice
(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

11. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{a}-1)^n = a^2$ dla $a \geqslant 1$, oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2} = 1$.

12. Oblicz $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

13. Pokaż,że jeśli $a_n \in \mathbb{Q}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

14. Niech $(\theta_n)_n$ to ciąg zdefiniowany w lemacie 3. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 1$.

15. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

16. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.