Analiza - klasa 3a   Zestaw 10.   27.2.2024

Kresy zbiorów

Definicje. Niech $A \subset \mathbb{R}$.

- Zbiór A jest *ograniczony z góry* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant b$. Każdą taką liczbę b nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A.
- Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

  (i) b jest ograniczeniem górnym zbioru A;
  (ii) jeżeli c jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $b \leqslant c$.

  Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$.

Analogicznie definujemy zbiór *ograniczony z dołu*, *ograniczenie dolne* i *kres dolny* (*infimum*) zbioru A, oznaczany $\inf A$.

Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$. Ponadto przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$ i $\sup \emptyset = -\infty$.

Jeżeli $a = \sup A$ i $a \in A$, to mówimy, że a jest *elementem maksymalnym* zbioru A i stosujemy oznaczenie $a = \max A$. Podobnie definiujemy *element minimalny* $\min A$.

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A
$\iff$ b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ b - \varepsilon < a$
$\iff$ b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz istnieje ciąg $a_n \in A$ zbieżny do b.

(ii) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru A
$\iff$ b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a\in A}\ a < b + \varepsilon$
$\iff$ b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz istnieje ciąg $a_n \in A$ zbieżny do b.

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.

Stw. 2. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny.

Definicja. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest to najmniejszy podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ o własnościach (i) $1 \in A$ oraz (ii) jeśli $a \in A$ to $a + 1 \in A$.

Stw. 3. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Stw. 4. (Zasada Archimedesa). Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturnalna n taka, że $n > a$.

Tw. 5. (istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych). Jeżeli $a \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \geqslant 0$ taka, że $b^n = a$.

Tw. 5. (o gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, $a < b$, istnieje liczba $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < x < b$.

Definicja. Jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste, $\lambda \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy, że $\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$, $-A = (-1) \cdot A$, $A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ zachodzi $a \leqslant b$. Udowodnij, że $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

2. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $b = \inf A$, $c = \sup A$. Wyznacz kresy zbioru $\lambda \cdot A$.

3. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i mają skończone kresy. Udowodnij równości:

(i) $\sup(-A) = -\inf A$,
(ii) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
(iii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
(iv) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$,
(v) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, jeśli $A, B \subset [0, +\infty)$.

4. Znajdź kresy zbiorów. Czy zbiory mają elementy maksymalne i minimalne?

(a) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) $\left\{\frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(c) $\left\{x - \frac{1}{x} : 1 \leqslant x \leqslant 2024\right\}$;

(d) $\left\{\frac{n - k}{n + k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$;

(e) $\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| : m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m\right\}$;

(f) $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$;

(g) $\left\{\frac{nm}{2n^2 + m^2} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(h) $\{xyz : x + y + z = 6 \text{ i } 0 \leqslant x, y, z\}$

(i) $\{(1 - 4a)b^3 + a^2 : a, b \in (0, 1)\}$

(j) $\left\{\frac{(n + m)^2}{2^{nm}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(k) $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Dany jest zbiór $E = \{1 + n^{-2} : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz kresy zbioru $E + 2 \cdot E$.

6. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ ma własność, że dla każdego $A \in A$ istnieje eement $b \in A$ taki, że $b \leqslant \frac{a}{2} + 1$. Udowodnij, że $\inf A \leqslant 2$.

7. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Udowodnij, że istnieje liczba wymierna q taka, że $a < qx < b$.

8. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału $(0, 1)$. Wyznacz zbiór $A + A$.

9. Udowodnij, że istnieją ciągi liczb wymiernych $(a_n), (b_n)$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3}\right) = \sqrt{5}.$$

10. Wyznacz kres górny zbioru $\left\{\frac{x(1 + \sqrt{y})}{x^2 + y^2} : 0 < x \leqslant y < 1\right\}$.

11. Wyznacz kresy zbioru

$$\left\{\frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3} + \ldots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{a_n} + \frac{na_n}{a_1} : a_1, a_2, \ldots, a_n > 0\right\}.$$