Analiza - klasa 3a Zestaw 9. 30.1.2024

Granica ciągu II

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do* $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \ a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \to +\infty$. Wówczas

- $\frac{1}{a_n} \to 0$,
- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny lub ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$ i $a_n b_n \to +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \geqslant a_n$ dla prawie wszystkich n, to $b_n \to +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\frac{1}{n} \cdot n$, $\frac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\frac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\frac{0}{0}$, np. $\frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\frac{\infty}{\infty}$, np. $\frac{n}{n+1}$, $\frac{2^n}{n}$, $\frac{n}{2^n}$,
- 1^∞, np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0, np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

---

1. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

2. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że w ciągu (b_n) wystepuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) sa całkowite.

3. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że nie istnieją:

(a) $\frac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$,

(b) $\frac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$,

(c) $\frac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$,

(d) $\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(e) $n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2} \right)$,

(f) $\sqrt{n^4 - 3n} \left(\sqrt[3]{1 - n^3} + n \right)$,

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(h) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

4. (a) Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Załóżmy, że $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\frac{2^n}{n!}$, (b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. Liczby całkowite a_n, b_n spełniają zależność $a_n + b_n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

7. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8. (a) Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = g.$$

(b) Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = g.$$

9. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

10. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\sqrt[n]{2 \cdot 5^n - 3^n + n^3 \sin n}$, (b) $\sqrt[n]{n!}$.

11. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n}{n}.$$

12. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = +\infty.$$