Analiza - klasa 3a Zestaw 8. 2.1.2024

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \to g$.

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do* g. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *ciągiem rozbieżnym*.

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to
(i) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$, (ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Stw. 3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Tw. 4. (o trzech ciągach) Dane są trzy ciagi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Stw. 5. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas
(i) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,
(ii) jeśli $b \neq 0$, to $b_n \neq 0$ dla dostatecznie dużych n i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Stw. 6. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdego n, lub $2 \nmid k$ to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

---

1. Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$, (b) jeśli $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.
2. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$. Następnie udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
4. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$.
5. Załóżmy, że $a_n \to a$. Wykaż, że $|a_n| \to |a|$. Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.
6. Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:
   (a) $a_n = n$,
   (b) $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
   (c) $c_n = \frac{q^n}{n^k}$, gdzie $|q| > 1$, $k \in \mathbb{N}$,
   (d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
   (e) $b_n = \frac{n^n}{n!}$.
7. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n > a$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > a$ dla $n > N$.
8. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > b_n$ dla $n > N$.
9. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n > N$. Wykaż, że
   $$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$
   Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
10. Załóżmy, że $a_n \to g$. Wykaż, że ciąg $b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n}$ też jest zbieżny do g.
11. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny do 0. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
13. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:
    (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{2n+8}$,
    (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)^2}{3n^2+7n-6}$,
    (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+1} - 2\cdot 2^{2n}}{5\cdot 3^n - 4^{n+2}}$,
    (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n - 7\cdot 3^n}{3^n + 2}$,
    (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n}$,
    (f) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$,
    (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$,
    (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n+k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$,
    (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n-1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$,
    (j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,
    (k) $\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1})$,
    (l) $\frac{n}{n^2+1}\sin(n!)$.
    (m) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$,
    (n) $\sqrt[n]{3^n-2^n}$,
    (o) $\sqrt[n]{n+3^n}$,
    (p) $\sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,
    (q) $\sqrt[n^2]{n}$,
    (r) $\sqrt[n+2]{n-2}$, $n \geqslant 2$,
    (s) $\sqrt[n^2]{5^n-4}$,
    (t) $\sqrt[n]{5^{n-1} - 7\cdot 2^{2n} - 100}$