

Powtórzenie

1. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} a^2x - 9y & = & 0 \\ (a+2)x & + & 2z = 10 \\ & 5y + (a-1)z & = -15 \end{cases}$$

- (a) nie ma rozwiązań,
 (b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
 (c) ma wiele rozwiązań.

2. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.

3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2022} - 2021x^{1011} + x^2 - 5x + 2021$ przez $x^2 - 1$.

4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia n taki, że $w(2) = 7$ i $w(5) = 13$.

5. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + 5$ jest podzielny przez
 (a) $(x+1)^2$, (b) $x^2 + 4$?

6. Zapisz wielomian $4x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 5$ jako wielomian zmiennej $t = x + 1$.

7. Dla jakich a, b wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu?

8. Wyznacz wszystkie zespolone pierwiastki wielomianów:

- (a) $3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$,
 (b) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3$,
 (c) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$,
 (d) $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1$.

9. Wyznacz rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

10. Niech $n \geq 2$. Udowodnij, że wielomian

$$p(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

11. Dla jakich wartości współczynnika $a \in \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 + ax^2 - 3x - 19$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$?

12. Wielomian $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, ma współczynniki całkowite i $7 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 7.

13. Udowodnij, że wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid ad$ i $2 \mid bc$, nie może mieć trzech pierwiastków wymiernych.

14. Rozłóż wielomiany na czynniki o całkowitych współczynnikach:

- (a) $x^6 + x^4 + 2x^2 + 2$,
 (b) $x^6 - 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 1$,
 (c) $x^{16} - x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$,
 (d) $x^8 + x^4 + 2x^2 + 6$,
 (e) $x^9 + x^7 - x^5 - x^3 + 2x^2 + 2$.

15. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^7 + (x+3)^7 + (x+4)^7 + 6$ jest nierozkładalny nad \mathbb{Z} .

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $x^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

17. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad \mathbb{Z} .